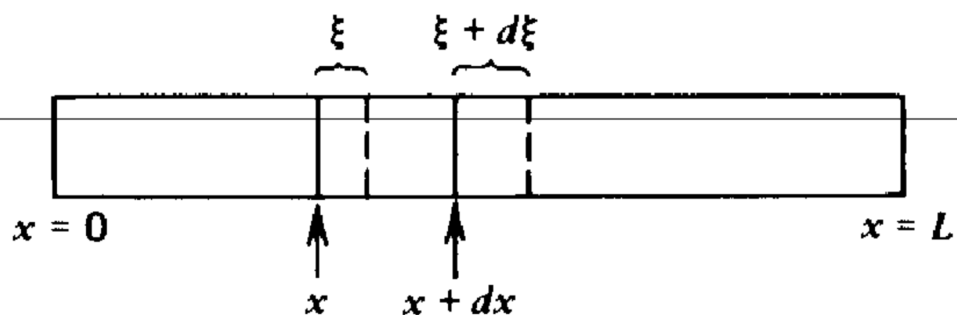


انتشار امواج طولی در میله

< هنگامی که آشفتگی موج طولی در طول میله‌ای منشر می‌شود، جابجایی ذرات میله به موازات محور آن است.

< اگر ابعاد عرضی میله نسبت به طول آن کوچک باشد، هر سطح مقطع عمودی بر محور را می‌توان واحد متحرکی گرفت

< انتشار امواج طولی در میله، تراکم و انبساط لایه‌ها سبب اندکی جابجائی نقاط میله در امتداد عرضی می‌شود. ولی اگر میله نازک باشد می‌توان از حرکات جانبی لایه‌ها صرفه نظر کرد.



< میله‌ای به طول l و مقطع S در نظر می‌گیریم که تحت تاثیر نیروی طولی قرار گرفته است.

< تاثیر این نیرو باعث تغییر مکان ذرات میله در امتداد محور میله می‌گردد که مقدار آن ξ را می‌توان برای همه نقاط واقع در یک سطح مقطع عمود بر محور یکسان فرض کرد.

< اگر نیروهای موثر ثابت باشد،

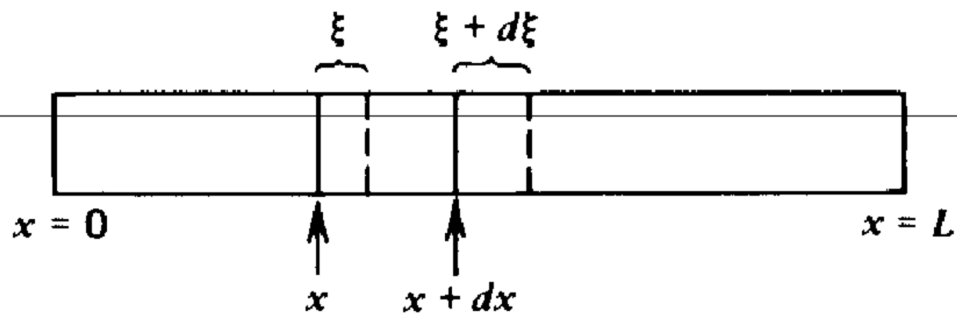
$$\xi = \xi(x, y, z)$$

< اگر نیروهای موثر متغیر باشد،

$$\xi = \xi(x, y, z, t)$$

< اگر سطح مقطع میله نسبت به طول میله کوچک باشد، تغییر مکان ذرات به y و z بستگی ندارد.

$$\xi = \xi(x, t)$$



استرین طولی

< لایه‌ای بطول dx بین دو سطح مقطع x و $x+dx$ در نظر می‌گیریم.

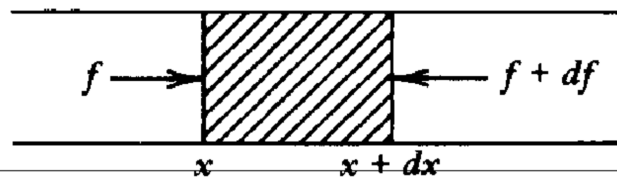
< اگر نیروهای موثر باعث تغییر مکان سطح مقطع واقع در x به اندازه ξ به طرف راست شوند، در اثر انتقال موج طولی تغییر مکان سطح مقطع در $x+dx$ به اندازه $\xi+dx\xi$ به طرف راست خواهد بود

< چون dx کوچک است تغییر مکان در $x+dx$ را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\xi + d\xi = \xi + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$$

$$\text{که} \quad \text{استرین طولی} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

استرین بدون بعد است.



معادله موج طولی

< هنگام انبساط میله نیروهای الاستیک در آن پدیدار می‌شود.

< امتداد این نیروها عمود بر مقطع‌های عرضی میله است.

< این نیروها باعث اتصال لایه‌های میله به یکدیگر است.

< براینده این نیروها را می‌توان بصورت زیر نمایش داد

$$f = f(x, t)$$

< بنا بر قرارداد مقدار مثبت f را نماینده تراکم (compression) در نظر می‌گیریم. به این ترتیب

مقدار منفی f را نماینده تنش (tension) در نظر می‌گیریم

استرس

< استرس در میله بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{استرس} = \frac{f}{s}$$

که s سطح مقطع عمود بر محور میله است. استرس ابعاد فشار دارد.

< قانو هوک بین استرس و استرین بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{f/s}{\partial \xi / \partial x} = -Y$$

که Y مدول یانگ (Young's modulus) نامیده می‌شود.

< چون استرس مثبت با استرین منفی همراه است، علامت منفی سبب مثبت بودن

مدول یانگ می‌شود

< نیروهای درونی طولی میله

$$f = -sY \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

< اگر $f(x,t)$ نیروی داخلی وارد بر مقطع x باشد، نیروی وارد بر مقطع $x+dx$ در جهت

مخالف برابر $f(x+dx,t)$ خواهد بود.

< برابند نیروی وارد برا لایه‌ی dx

$$df = f(x,t) - f(x+dx,t) = f(x,t) - \left[f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx \right]$$

< با استفاده از رابطه $f = -sY (\partial \xi / \partial x)$ ، df بر حسب xi بدست می‌آید

$$df = sY \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

< اگر چگالی حجمی میله را ρ فرض کنیم، جرم لایه dx برابر $\rho s dx$ می‌شود.

< قانون دوم نیوتن برای لایه dx بصورت زیر داده می‌شود

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = df : \rho s dx \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) = sY \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

معادله موج طولی

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

که c سرعت انتشار موج طولی در میله است.

حل عمومی معادله موج بصورت زیر است

$$\xi(x, t) = g_1(ct - x) + g_2(ct + x)$$

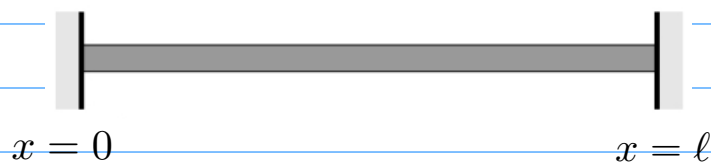
که g_1 معادله موج پیش‌رونده است و g_2 معادله موج پس‌رونده است.

فرم مختلط معادله موج طولی بصورت زیر داده می‌شود

$$\xi(x, t) = \mathbf{A}e^{i(\omega t - kx)} + \mathbf{B}e^{i(\omega t + kx)}$$

بررسی شرایط مرزی ساده

< اگر میله را در دو طرف ثابت فرض کنیم



$$\xi(x=0, t) = \xi(x=l, t) = 0$$

$$\xi(x=0, t) = 0 : \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = -\mathbf{A}$$

$$\xi(x, t) = \mathbf{A}(e^{-ikx} - e^{ikx})e^{i\omega t} = -2i\mathbf{A} \sin kx e^{i\omega t}$$

$$\xi(x = \ell, t) = 0 : \sin k\ell = 0$$

$$k_n \ell = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\xi_n(x, t) = -2i\mathbf{A}_n \sin k_n x e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = ck_n$$

اگر

$$\text{Re}[-2i\mathbf{A}_n e^{i\omega t}] = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$$

بنابراین

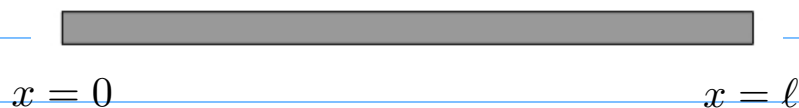
$$\xi_n(x, t) = \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

مجموع حل‌های هارمونیک

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

که a_n و b_n با اعمال شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

< اگر میله را در دو طرف آزاد فرض کنیم



هرگاه میله را در یک انتها آزاد فرض کنیم، در آن نقطه نیروی الاستیکی $f = -sY(\partial\xi/\partial x)$ برابر صفر است.

$$(\partial\xi/\partial x)(x = 0, t) = (\partial\xi/\partial x)(x = \ell, t) = 0$$

$$(\partial\xi/\partial x)(x = 0, t) = 0 : \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}$$

$$\xi(x, t) = \mathbf{A}(e^{-ikx} + e^{ikx})e^{i\omega t} = 2\mathbf{A} \cos kx e^{i\omega t}$$

$$(\partial \xi / \partial x)(x = \ell, t) = 0 : \sin k\ell = 0$$

$$k_n \ell = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\xi_n(x, t) = 2\mathbf{A}_n \cos k_n x e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = ck_n$$

اگر

$$\text{Re}[2\mathbf{A}_n e^{i\omega t}] = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$$

بنابراین

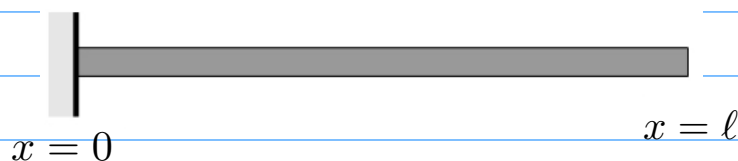
$$\xi_n(x, t) = \cos k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

مجموع حل‌های هارمونیک

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

که a_n و b_n با اعمال شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

< اگر میله را در یک طرف ثابت و در طرف دیگر آزاد فرض کنیم



هرگاه میله را در یک انتها آزاد فرض کنیم، در آن نقطه نیروی الاستیکی $f = -sY(\partial \xi / \partial x)$ برابر صفر است.

$$\xi(x = 0, t) = (\partial \xi / \partial x)(x = \ell, t) = 0$$

$$\xi(x = 0, t) = 0 : \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = -\mathbf{A}$$

$$\xi(x, t) = \mathbf{A}(e^{-ikx} - e^{ikx})e^{i\omega t} = -2i\mathbf{A} \sin kx e^{i\omega t}$$

$$(\partial \xi / \partial x)(x = \ell, t) = 0 : \cos k\ell = 0$$

$$k_n \ell = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\xi_n(x, t) = -2i\mathbf{A}_n \sin k_n x e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = ck_n$$

اگر

$$\text{Re}[-2i\mathbf{A}_n e^{i\omega t}] = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$$

بنابراین

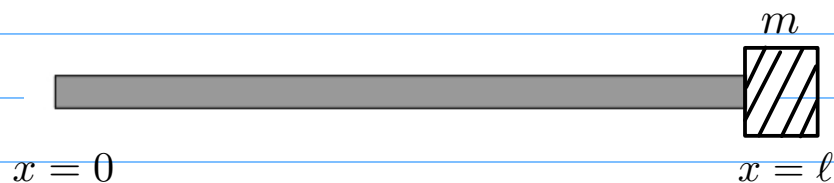
$$\xi_n(x, t) = \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

مجموع حل‌های هارمونیک

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

که a_n و b_n با اعمال شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

< میله را یک طرف آزاد و در طرف دیگر بارشده با جرم m فرض کرده‌ایم



هرگاه میله را در یک انتها آزاد فرض کنیم، در آن نقطه نیروی الاستیکی $f = -sY(\partial \xi / \partial x)$ برابر صفر است.

$$(\partial \xi / \partial x)(x = 0, t) = 0$$

$$(\partial \xi / \partial x)(x = 0, t) = 0 : \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}$$

$$\xi(x, t) = \mathbf{A}(e^{-ikx} + e^{ikx})e^{i\omega t} = 2\mathbf{A} \cos kx e^{i\omega t}$$

ارتعاشهای-میله‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

در بسیاری از کاربردهای عملی، انتهای میله نه محکم در قید گذاشته می‌شود و نه کاملاً آزاد است. بلکه نوعی امپدانس مکانیکی که بیشتر از نوع جرم تنظیم شده است به آن وصل می‌شود. این حات را میله بارشده می‌گویند

شرط مرزی در $x=L$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$f(x = \ell, t) = m \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)_{(x=\ell, t)}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که تراکم مثبت میله در سمت راست باعث شتاب جرم m به طرف راست می‌شود

اگر جرم m به انتهای چپ میله متصل باشد، نیروی مثبت تراکمی باعث شتاب جرم m به سمت چپ می‌شود،

$$-f(x = 0, t) = m \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)_{(x=0, t)}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که تراکم مثبت میله در سمت راست باعث شتاب جرم m به طرف راست می‌شود

$$\xi(x, t) = 2A \cos kx e^{i\omega t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)_{(x=\ell, t)} = -2\omega^2 A \cos k\ell e^{i\omega t}$$

$$f(x = \ell, t) = -sY \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{(x=\ell, t)} = 2kAsY \sin k\ell e^{i\omega t}$$

$$f(x = \ell, t) = m \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)_{(x=\ell, t)}$$

$$2kAsY \sin k\ell e^{i\omega t} = -2m\omega^2 A \cos k\ell e^{i\omega t}$$

$$\tan k\ell = -\frac{\omega mc}{sY}$$

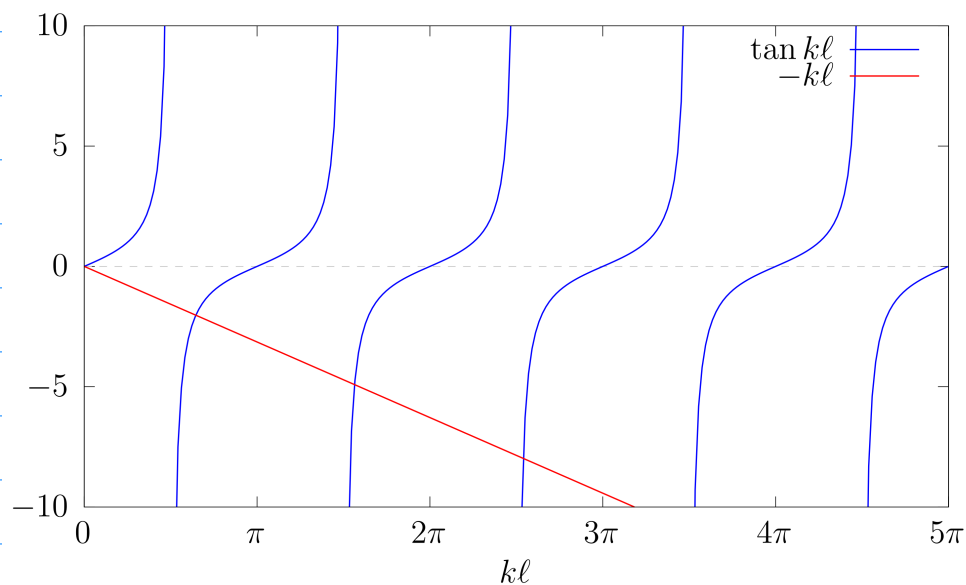
$$\omega = ck, \quad \tan k\ell = -\frac{km c^2}{sY} = -k\ell \frac{m c^2}{sY\ell}$$

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad \tan k\ell = -k\ell \frac{m c^2}{c^2 \rho s\ell} = -k\ell \frac{m}{\rho s\ell}$$

$$m_b = \rho s\ell, \quad \tan k\ell = -k\ell \frac{m}{m_b}$$

$$\boxed{\frac{\tan k\ell}{k\ell} = -\frac{m}{m_b}}$$

حالت خاص: $m = m_b$



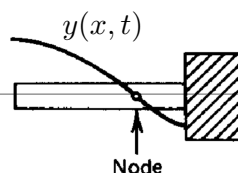
$$k\ell = 2.03, 4.91, 7.98, \dots$$

$$\xi_n(x, t) = \cos k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

مد اول: $k_1 \ell = 2.03 \Rightarrow k_1 = \frac{2.03}{\ell}, \quad \omega_1 = 2.03 \frac{c}{\ell}$

$$\cos k_1 \ell = -0.44 < 0$$

$$k\ell = \pi/2 < k_1 \ell : \cos k\ell = 0 : \text{node}$$



ارتعاشهای-میله‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$\xi(x, t) = 2\mathbf{A} \cos kx e^{i\omega t}$$

امپدانس مکانیکی میله باردار شده در $x = \ell$

$$f(x = \ell, t) = m \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)_{(x=\ell, t)} = -2m\omega^2 \mathbf{A} \cos k\ell e^{i\omega t}$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{(x=\ell, t)} = 2i\omega \mathbf{A} \cos k\ell e^{i\omega t}$$

$$f(x = \ell, t) = Z_\ell \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{(x=\ell, t)}$$

$$-2m\omega^2 \mathbf{A} \cos k\ell e^{i\omega t} = Z_\ell 2i\omega \mathbf{A} \cos k\ell e^{i\omega t}$$

$$-m\omega^2 = Z_\ell i\omega$$

$$Z_\ell = im\omega$$

امپدانس مکانیکی میله باردار شده در $x = 0$

$$f(x = 0, t) = -m \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)_{(x=0, t)} = 2m\omega^2 \mathbf{A} e^{i\omega t}$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{(x=0, t)} = 2i\omega \mathbf{A} e^{i\omega t}$$

$$f(x = 0, t) = Z_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{(x=0, t)}$$

$$m\omega^2 \mathbf{A} e^{i\omega t} = Z_0 i\omega \mathbf{A} e^{i\omega t}$$

$$m\omega^2 = Z_0 i\omega$$

$$Z_0 = -im\omega$$

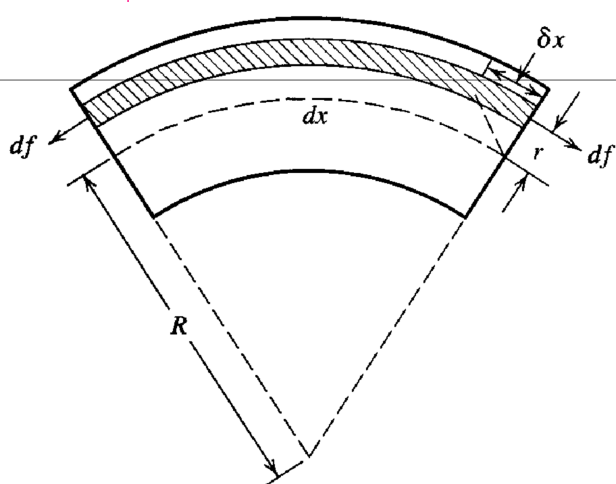
ارتعاشهای عرضی میله

- < میله‌ها قابلیت ارتعاش عرضی و نیز قابلیت ارتعاش طولی دارند.
- < بدلیل ارتباط بین استرین‌های طولی و خمشی، ایجاد یکی از آنها سبب تولید دیگری می‌شود.
- < برای مثال اگر ضربه‌ی چکشی که به یک سر میله‌ای برخورد می‌کند، اندکی انحراف از محور میله داشته باشد، سبب عدم تقارن ارتعاشی نقاط گوناگون و نهایت ارتعاش‌ها عرضی میله می‌شود.
- < تفاوت مشخصی بین ارتعاشات عرضی میله و تار وجود ندارد.
- < در تارها نیروی بازگرداننده بیشتر تحت تاثیر کشش پدیدار می‌شوند و سختی تار در آن کمتر است.

< در میله‌ها نیروی بازگرداننده تحت تاثیر هر دو یعنی کشش و سختی عمل می‌کند.

استرین‌های خمشی در میله یکنواخت

- < میله‌ای به طول l و مقطع ثابت S در نظر می‌گیریم.
- < برای هر نقطه در صفحه قائمی که از محور میله می‌گذرد، قرینه‌ای وجود دارد.
- < هنگامی که میله را کمی اندکی خم کنیم، قسمت پایین آن متراکم و قسمت بالای آن منبسط می‌شود.
- < بین قسمت پایین و بالا، قسمتی وجود دارد که طول آن تغییر می‌کند که آنرا محور خنثا می‌نماند
- < اگر مقطع میله نسبت به صفحه‌ی افقی قرینه باشد، محور خنثا بر محور مرکزی میله منطبق است.



< قطعه‌ای از میله به طول dx

< که R شعاع خمش محور خنثا را مشخص می‌کند.

< ناحیه‌ی هاشور خورده که به فاصله r از محور خنثا

قرار دارد، بر اثر خمش به اندازه

$$\delta x = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$$

افزایش طول دارد.

< نیروی طولی df بصورت

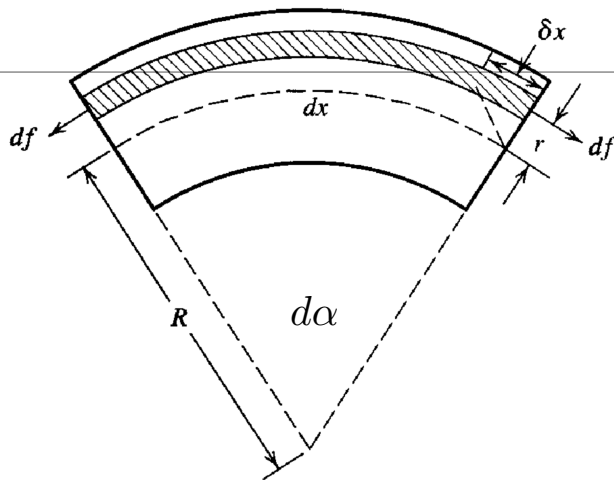
$$df = -Y dS \frac{\partial \xi}{\partial x} = -Y dS \frac{\delta x}{dx}$$

داده می‌شود.

نیروی کشش : $\delta x > 0 \Rightarrow df < 0$

نیروی تراکم : $\delta x < 0 \Rightarrow df > 0$

از تعریف قوس دایره



$$dx = R d\alpha$$

$$dx + \delta x = (R + r) d\alpha$$

$$d\alpha = \frac{dx}{R} = \frac{dx + \delta x}{R + r}$$

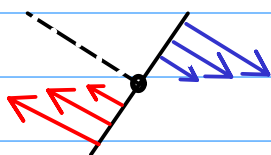
$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{r}{R}$$

بنابراین نیروی طولی بصورت زیر داده می‌شود

$$df = -Y dS \frac{\delta x}{dx} = -\frac{Y}{R} r dS$$

< نیروی برآیند طولی در هر سطح مقطع از میله برابر صفر است

محور خنثی



$$f = \int df = 0$$

< گشتاور خمشی در میله

$$M = \int r df = -\frac{Y}{R} \int r^2 dS$$

تعریف شعاع ژیراسیون مقطع S

$$K^2 = \frac{1}{S} \int r^2 dS$$

شعاع ژیراسیون

برای میله‌ای به مقطع دایره‌ای و شعاع a

$$K = a/\sqrt{2}$$

برای میله‌ای به مقطع مربعی و ضخامت t

$$K = t/\sqrt{12}$$

با اعمال تعریف شعاع ژیراسیون ، گشتاور خمش بصورت زیر داده می‌شود

$$M = -\frac{YS}{R}K^2$$

شعاع انحنا یا خمیدگی بصورت زیر است

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

اگر تغییر مکان y در نقاط میله، محدود به مقادیر کوچک باشد،
آنگاه شیب میله در هر نقطه مقابل واحد بسیار کوچک است، یعنی

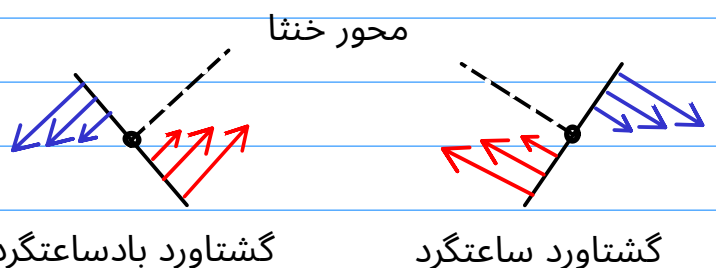
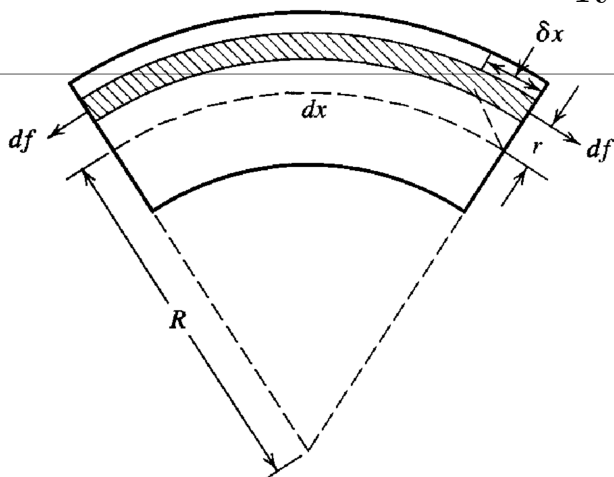
$$y' = \partial y / \partial x \ll 1$$

رابطه شعاع انحنا بصورت زیر تغییر می‌کند

$$R = \frac{1}{y''} = \frac{1}{\partial^2 y / \partial x^2}$$

با قرار دادن R در رابطه گشتاور

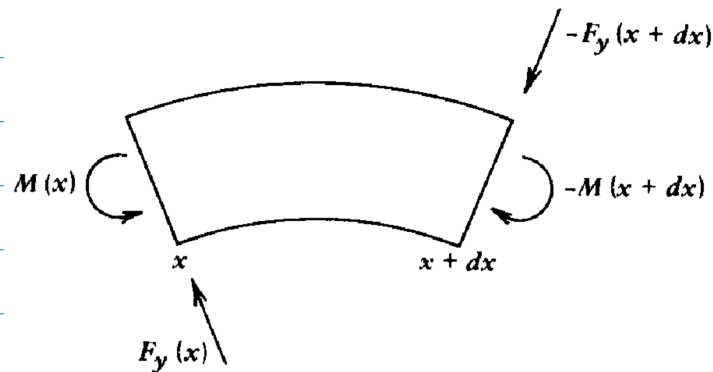
$$M = -\frac{YS}{R}K^2 = -YSK^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



معادله موج عرضی

< تغییر شکل میله در اثر گشتاورهای خمشی در دو انتهای میله باعث ایجاد نیروهای برشی (shear forces) می‌گردد.

< اگر نیروی برشی F_y در سمت چپ را مثبت فرض کنیم، نیروی برشی وارد در سمت راست منفی خواهد بود.



$$M(x) - M(x + dx) - F_y(x + dx)dx = \frac{dL}{dt}$$

< چنانچه تغییر شکل میله و تغییر مکان نقاط آن اندک باشد، dL/dt را در آن می‌توان چشمپوشی کرد.

< هنگامی که میله خم شده در حال تعادل دورانی باشد، گشتاورهای خمشی و گشتاورهای واکنشی یکدیگر را خنثا می‌کنند

$$M(x) - M(x + dx) - F_y(x + dx)dx = 0$$

$$M(x) - \left(M(x) + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - \left(F_y(x)dx + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx^2 \right) = 0$$

از جمله dx^2 چشم پوشی می‌کنیم. بدین ترتیب رابطه بین نیروی برشی و گشتاور خمشی از شرط تعادل استاتیکی میله بدست می‌آید

$$F_y = -\frac{\partial M}{\partial x} = YSK^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

< تغییرات نیروی برشی F_y در دو سر قطعه dx

$$dF_y = F_y(x) - F_y(x + dx) = -\frac{\partial F_y}{\partial x} dx = -Y S K^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

< قانون دوم نیوتن برای قطعه به جرم dm

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = dF_y$$

$$\rho S dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Y S K^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{Y K^2}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -c^2 K^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}}$$

< بخاطر مشتق چهارم y نسبت به x ، جواب عمومی معادله موج عرضی میله به صورت $f(ct-x)$ نیست.

< بنابراین موج‌های عرضی در میله با سرعت ثابت و شکل ثابت در میله منتشر نمی‌شوند.

حل تناوبی معادله انتشار موج عرضی

$$y(x, t) = \Psi(x) e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 \Psi = -c^2 K^2 \frac{d^4 \Psi}{dx^4}$$

$$\frac{d^4 \Psi}{dx^4} = \frac{\omega^2}{c^2 K^2} \Psi$$

$$v = \sqrt{c K \omega} \quad \text{اگر}$$

$$\frac{d^4 \Psi}{dx^4} = \frac{\omega^4}{v^4} \Psi$$

جواب پیشنهادی

$$\begin{cases} \Psi = Ae^{\gamma x} \\ d^3\Psi/dx^4 = \gamma^4 Ae^{\gamma x} \end{cases}$$

$$\frac{d^4\Psi}{dx^4} = \frac{\omega^4}{v^4}\Psi \Rightarrow \gamma^4 Ae^{\gamma x} = \frac{\omega^4}{v^4} Ae^{\gamma x}$$

$$\gamma = \pm \frac{\omega}{v}, \pm i \frac{\omega}{v}$$

$$\Psi(x) = Ae^{\omega x/v} + Be^{-\omega x/v} + Ce^{i\omega x/v} + De^{-i\omega x/v}$$

ضرایب A، B، C و D مختلط هستند

$$y(x, t) = e^{i\omega t} [Ae^{\omega x/v} + Be^{-\omega x/v} + Ce^{i\omega x/v} + De^{-i\omega x/v}]$$

تنها جمله

$$De^{i\omega(t-x/v)}$$

نماینده انتشار موج با سرعت v به سمت راست است ولی خود v تابع ω است و ثابت نیست.

بدین ترتیب هر فرکانس با سرعت خاصی منتشر می شود. از این رو به آن سرعت فاز گفته می شود. مانند تراکسیل نور در شیشه است.

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \phi) [a \cosh(\omega x/v) + b \sinh(\omega x/v) + c \cos(\omega x/v) + d \sin(\omega x/v)]$$

ضرایب a، b، c و d حقیقی هستند. با اعمال شرایط مرزی و شرایط اولیه بدست می آیند.

< انتهای ثابت

اگر انتهای میله محکم به پایه‌ای ثابت متصل شده و بی‌حرکت بماند، تغییر مکان y و شیب تغییرات y در این نقطه به ازای تمامی مقادیر زمانی صفرند.

$$y = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

< انتهای آزاد

در این حالت گشتاور نیرو و نیروی برشی وارد به میله صفرند

$$M = 0 : \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$F_y = 0 : \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

میله یک سر آزاد

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \phi) [a \cosh(\omega x/v) + b \sinh(\omega x/v) + c \cos(\omega x/v) + d \sin(\omega x/v)]$$

$$y(x = 0, t) = 0 : a + c = 0 \Rightarrow c = -a$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) (x = 0, t) = 0 : b + d = 0 \Rightarrow d = -b$$

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \phi) [a(\cosh(\omega x/v) - \cos(\omega x/v)) + b(\sinh(\omega x/v) - \sin(\omega x/v))]$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)(x = \ell, t) = 0$$

$$a(\cosh(\omega\ell/v) + \cos(\omega\ell/v)) = -b(\sinh(\omega\ell/v) + \sin(\omega\ell/v))$$

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)(x = \ell, t) = 0$$

$$a(\sinh(\omega\ell/v) - \sin(\omega\ell/v)) = -b(\cosh(\omega\ell/v) + \cos(\omega\ell/v))$$

$$\frac{(\cosh(\omega\ell/v) + \cos(\omega\ell/v))}{(\sinh(\omega\ell/v) - \sin(\omega\ell/v))} = \frac{(\sinh(\omega\ell/v) + \sin(\omega\ell/v))}{(\cosh(\omega\ell/v) + \cos(\omega\ell/v))}$$

$$(\cosh(\omega\ell/v) + \cos(\omega\ell/v))(\cosh(\omega\ell/v) + \cos(\omega\ell/v)) = (\sinh(\omega\ell/v) - \sin(\omega\ell/v))(\sinh(\omega\ell/v) + \sin(\omega\ell/v))$$

$$\cosh^2(\omega\ell/v) + \cos^2(\omega\ell/v) + 2 \cosh(\omega\ell/v) \cos(\omega\ell/v) = \sinh^2(\omega\ell/v) - \sin^2(\omega\ell/v)$$

$$\cosh^2(\omega\ell/v) + \cos^2(\omega\ell/v) - \sinh^2(\omega\ell/v) + \sin^2(\omega\ell/v) = -2 \cosh(\omega\ell/v) \cos(\omega\ell/v)$$

$$2 = -2 \cosh(\omega\ell/v) \cos(\omega\ell/v) \Rightarrow \cosh(\omega\ell/v) \cos(\omega\ell/v) = -1$$

اتحادهای مفید

$$\boxed{\begin{aligned} \tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \\ \tanh^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{\cosh \theta - 1}{\cosh \theta + 1} \Rightarrow \cosh \theta = \frac{1 + \tanh^2(\theta/2)}{1 - \tanh^2(\theta/2)} \end{aligned}}$$

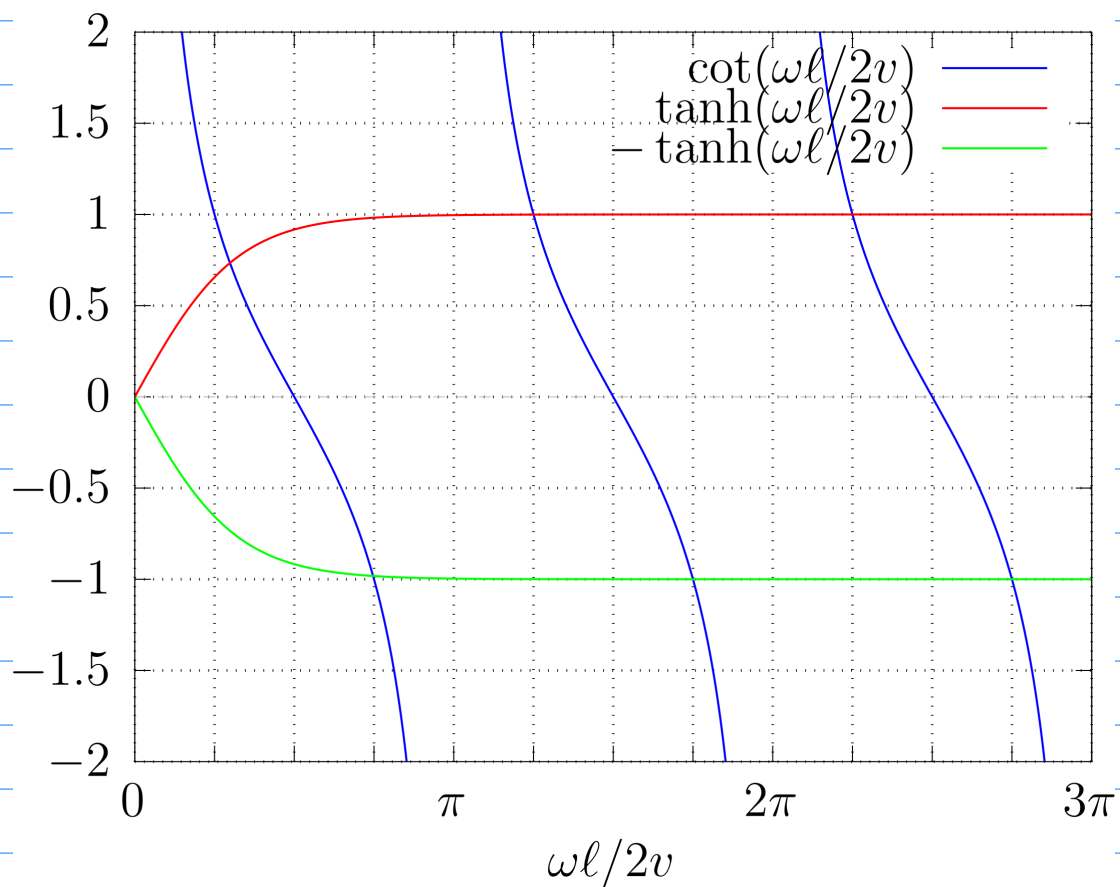
$$\cosh(\omega\ell/v) \cos(\omega\ell/v) = -1$$

$$\left(\frac{1 - \tan^2(\omega\ell/2v)}{1 + \tan^2(\omega\ell/2v)} \right) \left(\frac{1 - \tanh^2(\omega\ell/2v)}{1 + \tanh^2(\omega\ell/2v)} \right) = -1$$

$$(1 - \tan^2(\omega\ell/2v))(1 - \tanh^2(\omega\ell/2v)) = -(1 + \tan^2(\omega\ell/2v))(1 + \tanh^2(\omega\ell/2v))$$

$$-2 \tan^2(\omega\ell/2v) \tanh^2(\omega\ell/2v) = -2$$

$$\cot(\omega\ell/2v) = \pm \tanh(\omega\ell/2v)$$



$$\frac{\omega\ell}{2v} = \frac{\pi}{4}(1.194, 2.988, 5, 7, \dots)$$

$$v = \sqrt{\omega c K} \quad , \quad \frac{\omega \ell}{2v} = \frac{\sqrt{\omega} \ell}{2\sqrt{cK}} = \frac{\pi}{4}(1.194, 2.988, 5, 7, \dots)$$

$$\frac{\omega \ell^2}{4cK} = \frac{\pi^2}{16}(1.194^2, 2.988^2, 5^2, 7^2, \dots)$$

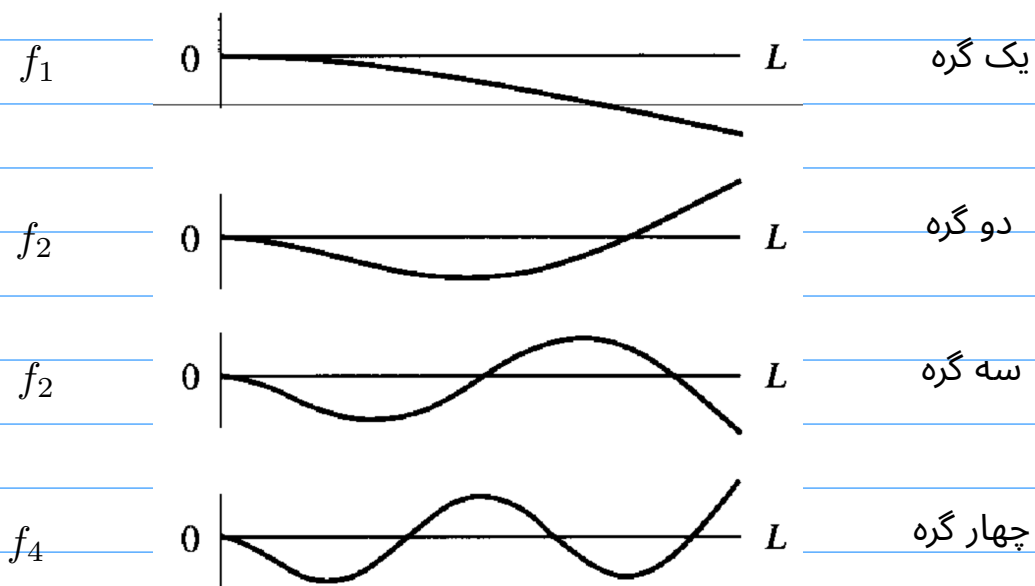
$$\omega = \frac{\pi^2 c K}{4\ell^2}(1.194^2, 2.988^2, 5^2, 7^2, \dots)$$

$$v = \frac{\pi}{2} \frac{cK}{\ell}(1.194, 2.988, 5, 7, \dots)$$

$$f = \frac{\pi c K}{8\ell^2}(1.194^2, 2.988^2, 5^2, 7^2, \dots)$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{1}{4}(1.194, 2.988, 5, 7, \dots)$$



< موقعیت نقاط گره در این گونه میله‌ها مانند تارهای مرتعش نیست.

< فاصله بین دو گره متوالی نصف طول موج نیست. بلکه فاصله بین گره‌ها نامنظم است.

< سه نوع نقطه گرهی وجود دارد:

۱. گره نوع یکم: در انتهای ثابت میله یک گره وجود دارد که

$$y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

۲. گره حقیقی:

$$y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx 0 \quad (\text{نقطه عطف})$$

۳. گره نزدیک به انتهای آزاد میله است. نقطه عطف نزدیک به این نقطه نیست.

$$y = 0$$

$$\frac{\omega \ell}{2v} = \frac{\pi}{4} (1.194, 2.988, 5, 7, \dots) \Rightarrow \frac{\omega \ell}{v} = \frac{\pi}{2} (1.194, 2.988, 5, 7, \dots)$$

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \phi) [a(\cosh(\omega x/v) - \cos(\omega x/v)) + b(\sinh(\omega x/v) - \sin(\omega x/v))]$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (x = \ell, t) = 0$$

$$\frac{b}{a} = - \frac{\cosh(\omega \ell / v) + \cos(\omega \ell / v)}{\sinh(\omega \ell / v) + \sin(\omega \ell / v)}$$

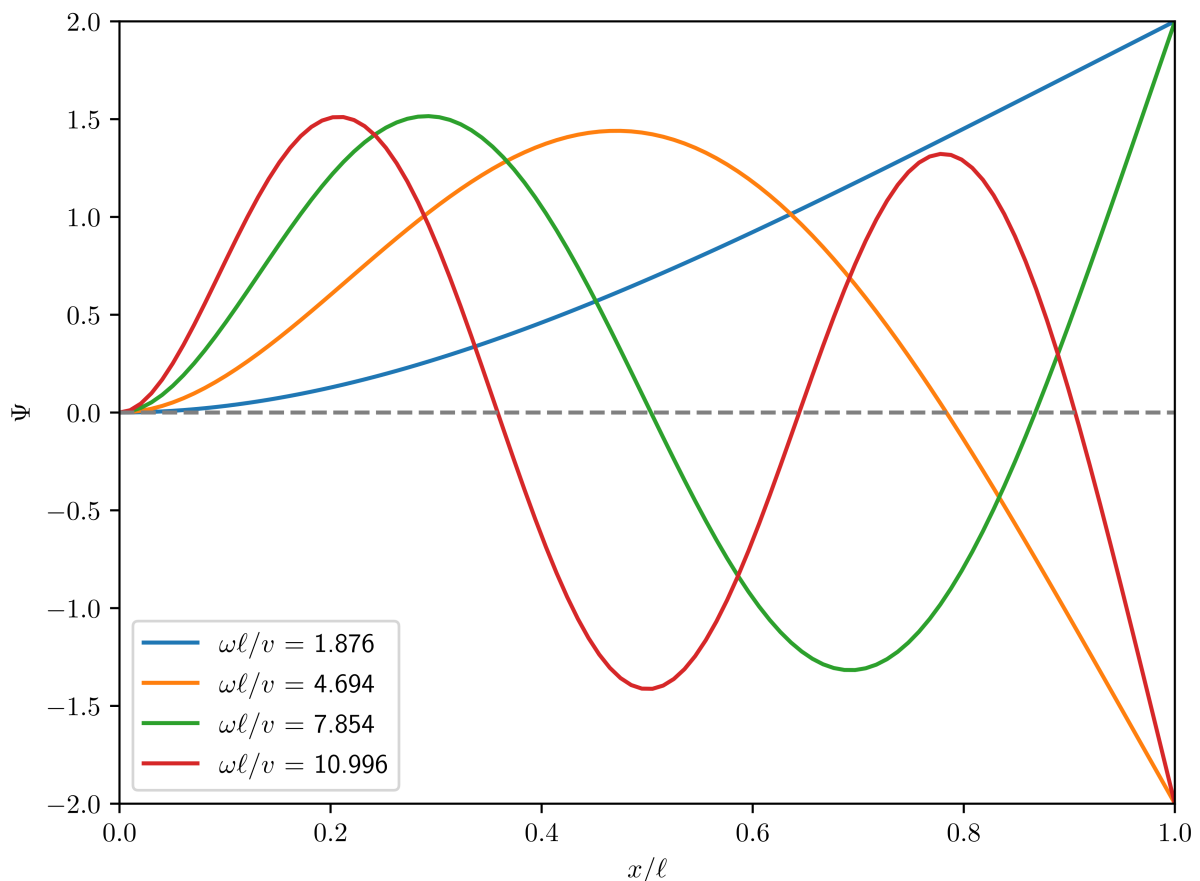
$$y(x, t) = a \cos(\omega t + \phi) [\cosh(\omega x/v) - \cos(\omega x/v)] - \left(\frac{\cosh(\omega \ell / v) + \cos(\omega \ell / v)}{\sinh(\omega \ell / v) + \sin(\omega \ell / v)} \right) (\sinh(\omega x/v) - \sin(\omega x/v))]$$

$$y(x, t) = a \cos(\omega t + \phi) \Psi(x)$$

$$\Psi(x) = \cosh(\omega x/v) - \cos(\omega x/v) - \left(\frac{\cosh(\omega \ell/v) + \cos(\omega \ell/v)}{\sinh(\omega \ell/v) + \sin(\omega \ell/v)} \right) (\sinh(\omega x/v) - \sin(\omega x/v))$$

اگر $\omega x/v = (\omega \ell/v)(x/\ell) = \frac{\pi}{2}(1.194, 2.988, 5, 7, \dots)(x/\ell)$

$$\Psi(x) = \cosh((\omega \ell/v)(x/\ell)) - \cos((\omega \ell/v)(x/\ell)) - \left(\frac{\cosh(\omega \ell/v) + \cos(\omega \ell/v)}{\sinh(\omega \ell/v) + \sin(\omega \ell/v)} \right) (\sinh((\omega \ell/v)(x/\ell)) - \sin((\omega \ell/v)(x/\ell)))$$



محل گره ها

$$\omega \ell/v = (\pi/2)2.988 : x_r/\ell = 0.784$$

$$\omega \ell/v = (\pi/2)5.000 : x_r/\ell = 0.504, 0.868$$

$$\omega \ell/v = (\pi/2)7.000 : x_r/\ell = 0.358, 0.644, 0.906$$

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \phi) [a \cosh(\omega x/v) + b \sinh(\omega x/v) + c \cos(\omega x/v) + d \sin(\omega x/v)]$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (x = 0, t) = 0 : a - c = 0 \Rightarrow c = a$$

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right) (x = 0, t) = 0 : b - d = 0 \Rightarrow d = b$$

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \phi) [a(\cosh(\omega x/v) + \cos(\omega x/v)) + b(\sinh(\omega x/v) + \sin(\omega x/v))]$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (x = \ell, t) = 0$$

$$a(\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v)) = -b(\sinh(\omega \ell/v) - \sin(\omega \ell/v))$$

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right) (x = \ell, t) = 0$$

$$a(\sinh(\omega \ell/v) + \sin(\omega \ell/v)) = -b(\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v))$$

$$\frac{(\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v))}{(\sinh(\omega \ell/v) + \sin(\omega \ell/v))} = \frac{(\sinh(\omega \ell/v) - \sin(\omega \ell/v))}{(\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v))}$$

$$(\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v))(\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v)) = (\sinh(\omega \ell/v) + \sin(\omega \ell/v))(\sinh(\omega \ell/v) - \sin(\omega \ell/v))$$

$$\cosh^2(\omega \ell/v) + \cos^2(\omega \ell/v) - 2 \cosh(\omega \ell/v) \cos(\omega \ell/v) = \sinh^2(\omega \ell/v) - \sin^2(\omega \ell/v)$$

$$\cosh^2(\omega\ell/v) + \cos^2(\omega\ell/v) - \sinh^2(\omega\ell/v) + \sin^2(\omega\ell/v) = 2 \cosh(\omega\ell/v) \cos(\omega\ell/v)$$

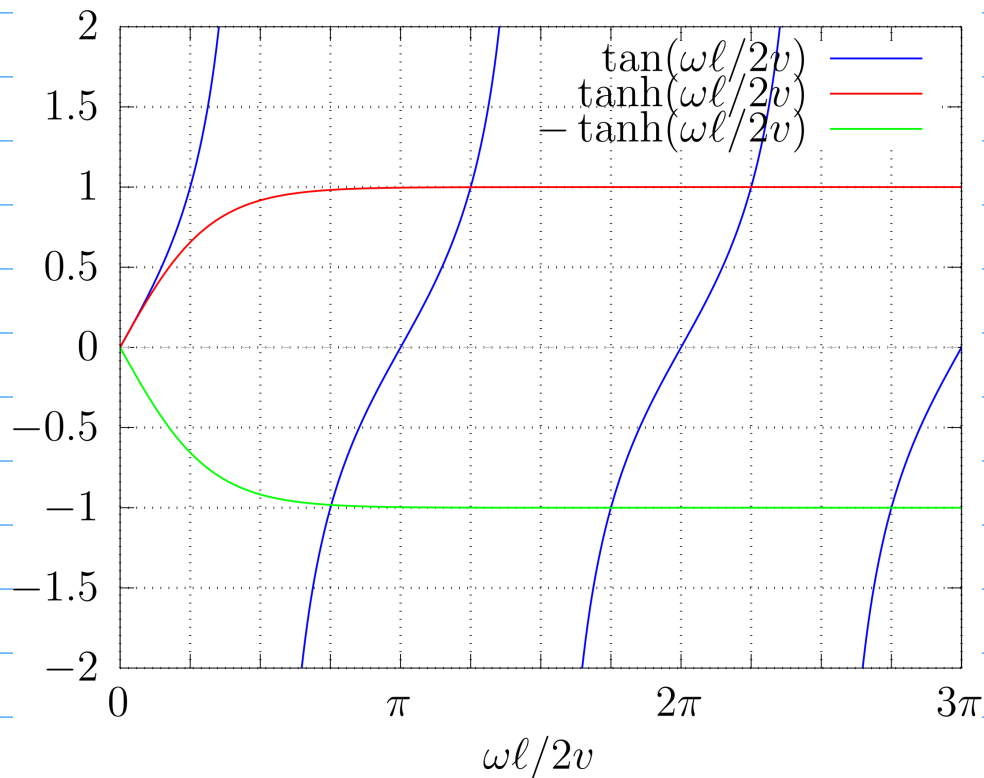
$$\cos(\omega\ell/v) \cosh(\omega\ell/v) = 1$$

$$\left(\frac{1 - \tan^2(\omega\ell/2v)}{1 + \tan^2(\omega\ell/2v)} \right) \left(\frac{1 - \tanh^2(\omega\ell/2v)}{1 + \tanh^2(\omega\ell/2v)} \right) = 1$$

$$(1 - \tan^2(\omega\ell/2v))(1 - \tanh^2(\omega\ell/2v)) = (1 + \tan^2(\omega\ell/2v))(1 + \tanh^2(\omega\ell/2v))$$

$$\tan^2(\omega\ell/2v) - \tanh^2(\omega\ell/2v) = 0$$

$$\tan(\omega\ell/2v) = \pm \tanh(\omega\ell/2v)$$



$$\frac{\omega\ell}{2v} = \frac{\pi}{4}(3.0112, 5, 7, 9, \dots)$$

$$v = \sqrt{\omega c K}, \quad \frac{\omega \ell}{2v} = \frac{\sqrt{\omega} \ell}{2\sqrt{cK}} = \frac{\pi}{4} (3.0112, 5, 7, 9, \dots)$$

$$\frac{\omega \ell^2}{4cK} = \frac{\pi^2}{16} (3.0112^2, 5^2, 7^2, 9^2 \dots)$$

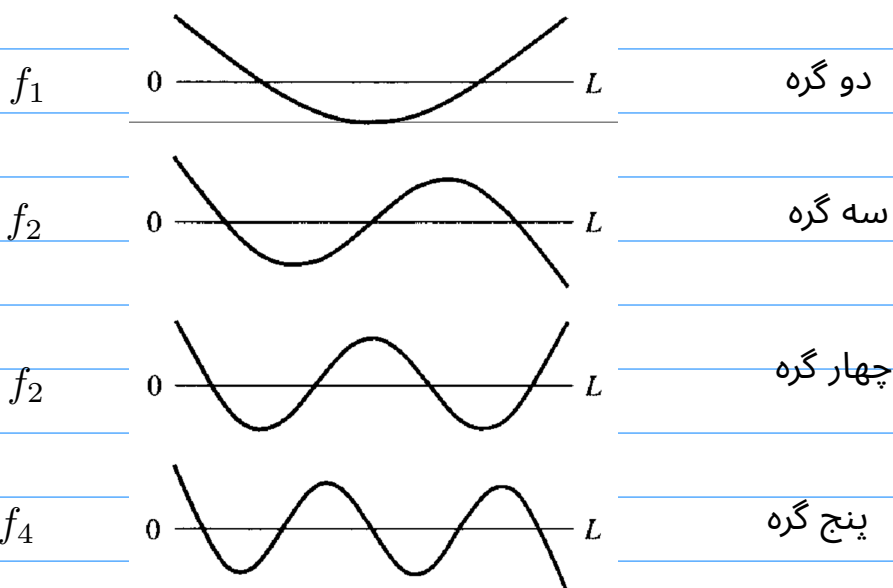
$$\omega = \frac{\pi^2 c K}{4\ell^2} (3.0112^2, 5^2, 7^2, 9^2 \dots)$$

$$v = \frac{\pi}{2} \frac{cK}{\ell} (3.0112, 5, 7, 9, \dots)$$

$$f = \frac{\pi c K}{8\ell^2} (3.0112^2, 5^2, 7^2, 9^2 \dots)$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{1}{4} (3.0112, 5, 7, 9, \dots)$$



$$\frac{\omega \ell}{2v} = \frac{\pi}{4}(3.0112, 5, 7, 9, \dots) \Rightarrow \frac{\omega \ell}{v} = \frac{\pi}{2}(3.0112, 5, 7, 9, \dots)$$

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \phi)[a(\cosh(\omega x/v) + \cos(\omega x/v)) + b(\sinh(\omega x/v) + \sin(\omega x/v))]$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)(x = \ell, t) = 0$$

$$\frac{b}{a} = -\frac{\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v)}{\sinh(\omega \ell/v) - \sin(\omega \ell/v)}$$

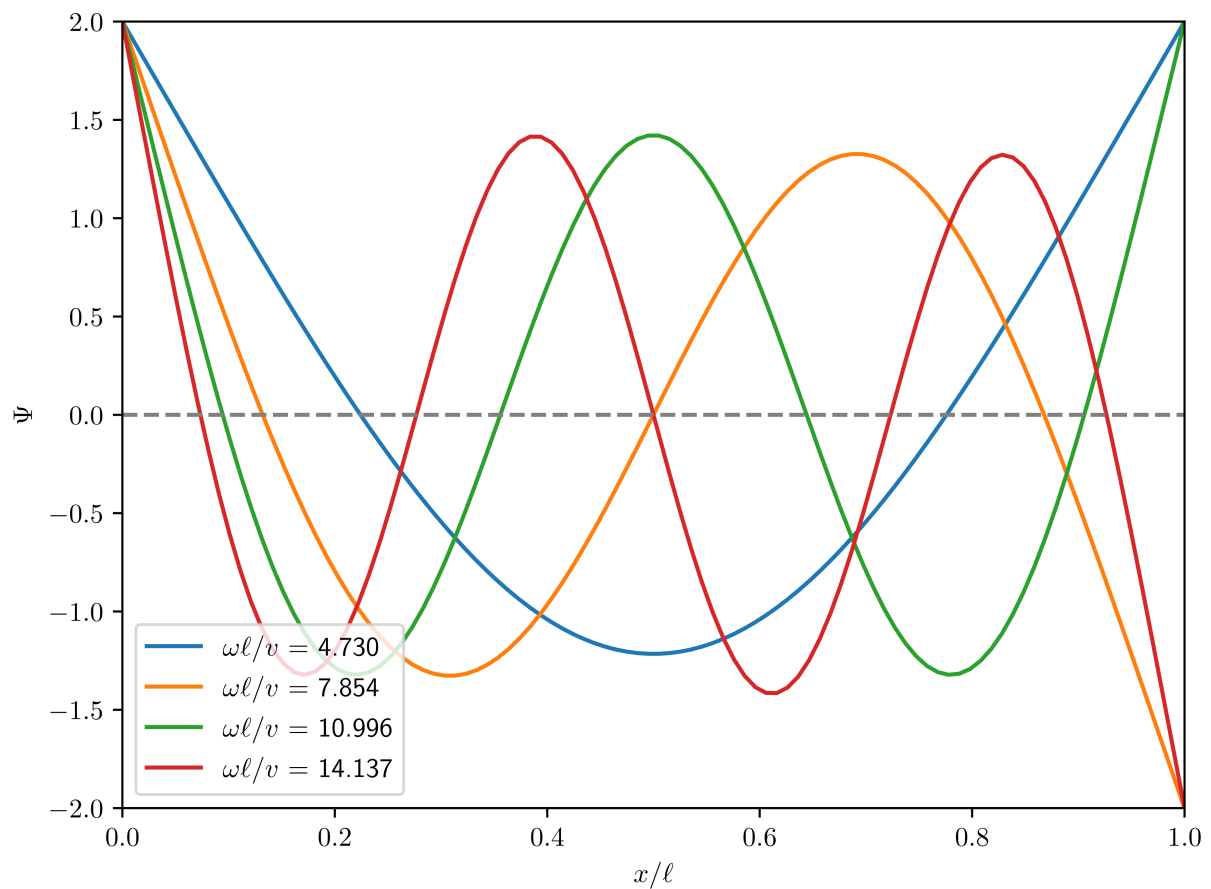
$$y(x, t) = a \cos(\omega t + \phi)[(\cosh(\omega x/v) + \cos(\omega x/v)) - \left(\frac{\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v)}{\sinh(\omega \ell/v) - \sin(\omega \ell/v)}\right)(\sinh(\omega x/v) + \sin(\omega x/v))]$$

$$y(x, t) = a \cos(\omega t + \phi)\Psi(x)$$

$$\Psi(x) = (\cosh(\omega x/v) + \cos(\omega x/v)) - \left(\frac{\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v)}{\sinh(\omega \ell/v) - \sin(\omega \ell/v)}\right)(\sinh(\omega x/v) + \sin(\omega x/v))$$

$$\text{اگر } \omega x/v = (\omega \ell/v)(x/\ell) = \frac{\pi}{2}(3.0112, 5, 7, 9, \dots)(x/\ell)$$

$$\Psi(x) = (\cosh((\omega \ell/v)(x/\ell)) + \cos((\omega \ell/v)(x/\ell))) - \left(\frac{\cosh(\omega \ell/v) - \cos(\omega \ell/v)}{\sinh(\omega \ell/v) - \sin(\omega \ell/v)}\right)(\sinh((\omega \ell/v)(x/\ell)) + \sin((\omega \ell/v)(x/\ell)))$$



محل گره ها

$$\omega l/v = (\pi/2)3.0112 : x_r = 0.224, 0.776$$

$$\omega l/v = (\pi/2)5.0000 : x_r = 0.132, 0.500, 0.868$$

$$\omega l/v = (\pi/2)7.0000 : x_r = 0.094, 0.356, 0.644, 0.906$$

$$\omega l/v = (\pi/2)9.0000 : x_r = 0.073, 0.277, 0.500, 0.723, 0.927$$

شعاع خمیدگی خط $y(x)$ بصورت رابطه زیر داده می‌شود

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

۱. تعریف اولیه انحنا

انحنا κ را می‌توان به عنوان نرخ تغییرات بردار واحد مماس $\mathbf{T}$ نسبت به طول قوس s تعریف کرد:

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

از آنجایی که $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ (که $\mathbf{r}$ بردار موقعیت است)،

می‌توانیم از قاعده زنجیره‌ای استفاده کنیم تا κ را بر حسب x بیان کنیم:

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right| \frac{dx}{ds}$$

۲. محاسبه بردار واحد مماس $\mathbf{T}$

برای یک منحنی $y(x)$ ، بردار موقعیت به صورت زیر است:

$$\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + y(x)\mathbf{j}$$

مشتق بردار موقعیت نسبت به x (بردار مماس):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dx} = \mathbf{i} + y'\mathbf{j}$$

طول این بردار (که همان نرخ تغییرات s نسبت به x است) برابر است با:

$$\frac{ds}{dx} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dx} \right| = \sqrt{1 + (y')^2}$$

حالا بردار واحد مماس $\mathbf{T}$ را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dx}{|d\mathbf{r}/dx|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}(\mathbf{i} + y'\mathbf{j})$$

۳. محاسبه مشتق بردار واحد مماس $d\mathbf{T}/dx$

حالا باید از $\mathbf{T}$ نسبت به x مشتق بگیریم. از قاعده مشتق حاصل ضرب برای عبارت

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot (\mathbf{i} + y'\mathbf{j})$$

استفاده می‌کنیم:

$$\text{فرض کنید } u = (1 + (y')^2)^{-1/2} \text{ و } \mathbf{v} = \mathbf{i} + y'\mathbf{j}$$

مشتق u نسبت به x :

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}(1 + (y')^2)^{-3/2} \cdot (2y'y'') = \frac{-y'y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

مشتق $\mathbf{v}$ نسبت به x :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = 0\mathbf{i} + y''\mathbf{j} = y''\mathbf{j}$$

طبق قاعده مشتق حاصل ضرب: $\frac{d\mathbf{T}}{dx} = u'\mathbf{v} + u\mathbf{v}'$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dx} = \left[\frac{-y'y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \right] (\mathbf{i} + y'\mathbf{j}) + \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] (y''\mathbf{j})$$

اگر جملات را مرتب کنیم با مخرج مشترک $(1 + (y')^2)^{3/2}$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dx} = \frac{-y'y''\mathbf{i} - (y')^2y''\mathbf{j} + (1 + (y')^2)y''\mathbf{j}}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dx} = \frac{-y'y''\mathbf{i} + y''\mathbf{j}}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

۴. محاسبه اندازه بردار $\left| \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right|$

حالا طول (اندازه) این بردار را می‌گیریم:

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right| = \sqrt{\left(\frac{-y'y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} \right)^2 + \left(\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} \right)^2}$$

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right| = \frac{\sqrt{(y')^2(y'')^2 + (y'')^2}}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{(y'')^2 \cdot (1+(y')^2)}}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

(نکته: در مرحله ساده‌سازی بالا، مخرج از توان $3/2$ به توان 1 رسید چون جذر در صورت وجود داشت).

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right| = \frac{|y''|\sqrt{1+(y')^2}}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{|y''|}{1+(y')^2}$$

بدین ترتیب

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right| \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$$

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right| = \frac{|y''|}{1+(y')^2}$$

$\Rightarrow$

$$\kappa = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$