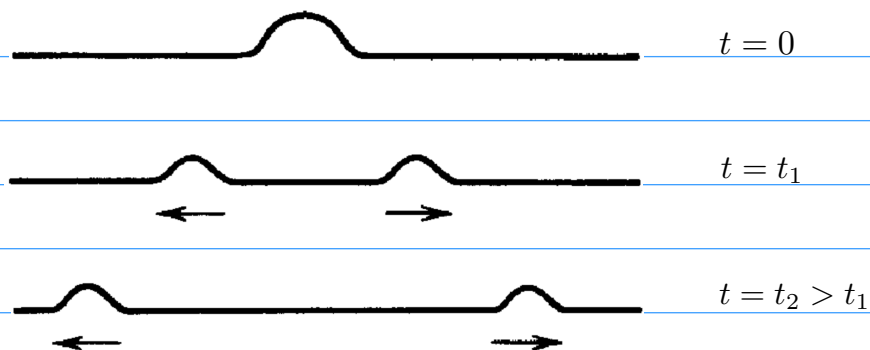


کشش تار T

چگالی خطی تار $\delta = \frac{m}{\ell}$

سرعت انتشار موج $c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}$

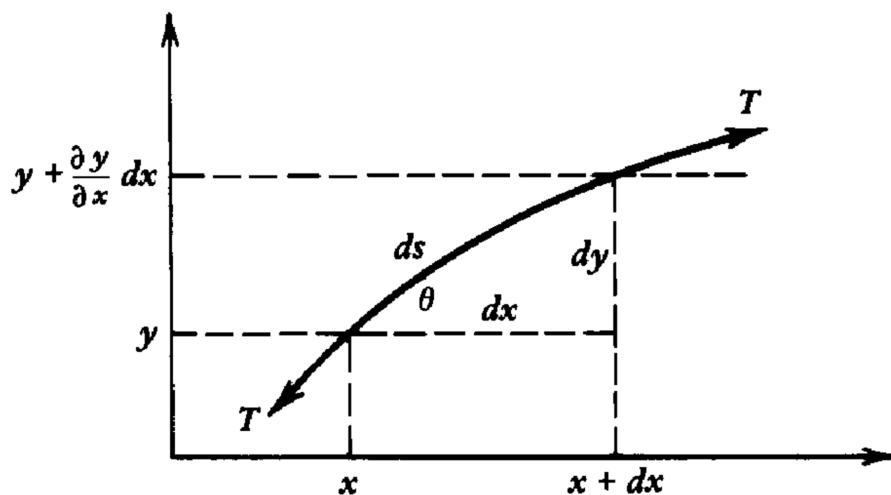


معادله موج عرضی در یک تار مرتعش

جزء به جرم dm تحت تاثیر کشش T بین x و $x + dx$ قرار دارد

زاویه θ مقدار کوچکی دارد

بزرگی کشش T مقدار ثابتی دارد



$$\begin{cases} \sum f_x = (T \cos \theta)_{x+dx} - (T \cos \theta)_x \\ \sum f_y = (T \sin \theta)_{x+dx} - (T \sin \theta)_x \end{cases}$$

$$\sum f_x = (T \cos \theta)_{x+dx} - (T \cos \theta)_x$$

برای θ های کوچک $(T \cos \theta)_{x+dx} \approx (T \cos \theta)_x$

$$\sum f_x = 0$$

$$\sum f_y = (T \sin \theta)_{x+dx} - (T \sin \theta)_x$$

برای θ های کوچک $(T \sin \theta)_{x+dx} \approx (T \sin \theta)_x + dx \frac{\partial (T \sin \theta)_x}{\partial x}$

$$\sum f_y = dx \frac{\partial (T \sin \theta)_x}{\partial x}$$

برای θ های کوچک $\sin \theta = \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$

$$\sum f_y = dx \left(T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

$$\begin{cases} \sum f_x = 0 \\ \sum f_y = dx \left(T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \end{cases}$$

قانون دوم نیوتن برای نوسان جرم dm در امتداد y

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum f_y$$

$$\delta dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = dx \left(T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right), \quad dm = \delta dx$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}}$$

مقدار ارتعاش هر نقطه x از تار و در هر لحظه t $y = y(x, t)$

سرعت ارتعاش هر نقطه x از تار و در هر لحظه t $\frac{\partial y}{\partial t} = v(x, t)$

جواب عمومی معادله موج

$$y = y_1(ct - x) + y_2(ct + x)$$

$y_1(ct - x)$, $x > 0$ موجی که با سرعت c در جهت $x > 0$ حرکت کند (پیشرونده)

$y_2(ct + x)$, $x < 0$ موجی که با سرعت c در جهت $x < 0$ حرکت کند (پسرنده)

بررسی جواب $y_1(ct - x)$ در معادله موج

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial y_1}{\partial (ct - x)} \frac{\partial (ct - x)}{\partial t} = c y_1^{(1)}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = c \frac{\partial y_1^{(1)}}{\partial t} = c \frac{\partial y_1^{(1)}}{\partial (ct - x)} \frac{\partial (ct - x)}{\partial t} = c^2 y_1^{(2)}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial(ct-x)} \frac{\partial(ct-x)}{\partial x} = -y_1^{(1)}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial y_1^{(1)}}{\partial x} = -\frac{\partial y_1^{(1)}}{\partial(ct-x)} \frac{\partial(ct-x)}{\partial x} = y_1^{(2)}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = c^2 y_1^{(2)}, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = y_1^{(2)}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} c^2 y_1^{(2)} = y_1^{(2)} \Rightarrow y_1^{(2)} = y_1^{(2)}$$

بررسی جواب $y_2(ct+x)$ در معادله موج

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = \frac{\partial y_2}{\partial(ct+x)} \frac{\partial(ct+x)}{\partial t} = c y_2^{(1)}$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = c \frac{\partial y_2^{(1)}}{\partial t} = c \frac{\partial y_2^{(1)}}{\partial(ct+x)} \frac{\partial(ct+x)}{\partial t} = c^2 y_2^{(2)}$$

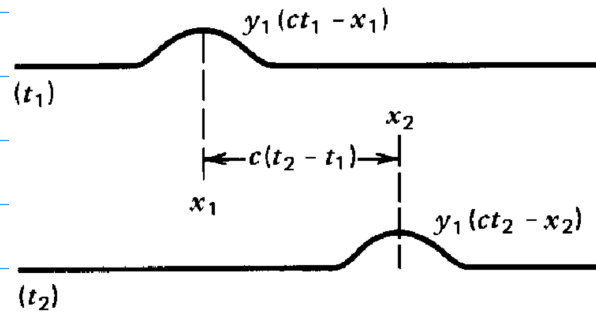
$$\frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial(ct+x)} \frac{\partial(ct+x)}{\partial x} = y_2^{(1)}$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = -\frac{\partial y_2^{(1)}}{\partial x} = -\frac{\partial y_2^{(1)}}{\partial(ct+x)} \frac{\partial(ct+x)}{\partial x} = y_2^{(2)}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = c^2 y_2^{(2)}, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = y_2^{(2)}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} c^2 y_2^{(2)} = y_2^{(2)} \Rightarrow y_2^{(2)} = y_2^{(2)}$$



مسافت طی شده برای موج پیشرونده

$$y_1(ct_1 - x_1) = y_2(ct_2 - x_2) \quad , \quad t_2 > t_1$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1) \Rightarrow x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$$

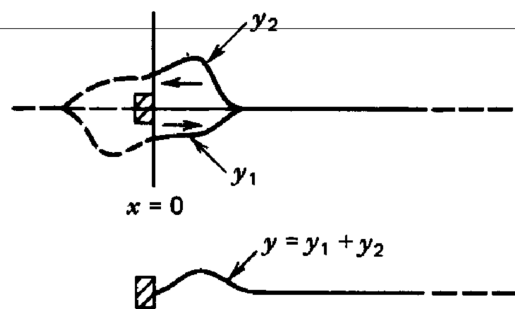
بازتاب از مرزها

$$y(x, t) = y_1(ct - x) + y_2(ct + x)$$

بازتاب از مرز ثابت

$$y(x = 0, t) = 0$$

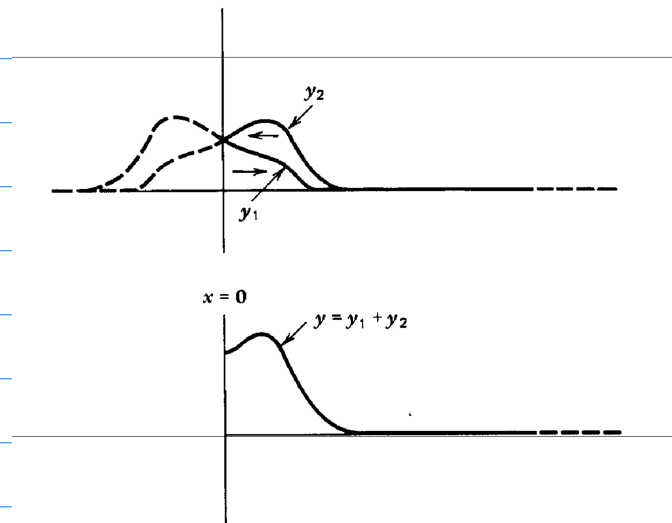
$$y_1(ct) + y_2(ct) = 0 \Rightarrow y_2(ct) = -y_1(ct)$$



بازتاب از مرز آزاد

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)(x=0, t) = 0$$

$$-y_1^{(1)}(ct) + y_2^{(1)}(ct) = 0 \Rightarrow y_2^{(1)}(ct) = y_1^{(1)}(ct)$$



انتگرال‌های مفید

$$\int_0^\ell \sin(m\pi x/\ell) \sin(n\pi x/\ell) dx = \frac{\ell}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_0^\ell \sin(m\pi x/\ell) \cos(n\pi x/\ell) dx = \int_0^\ell \cos(m\pi x/\ell) \sin(n\pi x/\ell) dx = 0$$

$$\int_0^\ell \cos(m\pi x/\ell) \cos(n\pi x/\ell) dx = \frac{\ell}{2} \delta_{mn}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \quad c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}$$

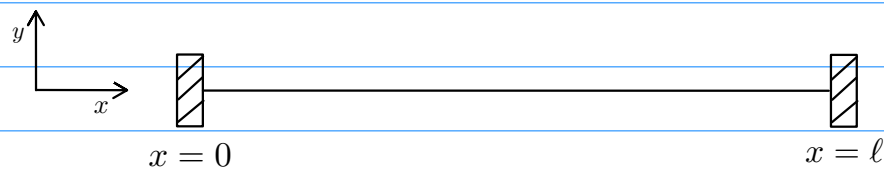
$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0 \Rightarrow X \sim A \cos kx + B \sin kx$$

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \Rightarrow T \sim C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

$$\omega = ck$$

$$y(x=0, t) = y(x=\ell, t) = 0 \Rightarrow X(x=0) = X(x=\ell) = 0$$



$$X(x=0) = 0 : A = 0$$

$$X(x=\ell) = 0 : \sin k\ell = 0 \Rightarrow k_n \ell = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) \sim B_n \sin k_n x$$

$$\omega_n = ck_n$$

$$y_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

که a_n و b_n با اعمال شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

$$dE_n = \frac{1}{2}dm \left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}dm\omega_n^2 y_n^2 \quad , \quad dm = \delta dx$$

$$dE_n = \frac{1}{2}\delta \left[\left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right)^2 + \omega_n^2 y_n^2 \right] dx$$

$$y_n(x, t) = \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$\left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right) (x, t) = \omega_n \sin k_n x (-a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t)$$

$$dE_n = \frac{1}{2}\delta\omega_n^2 \sin^2 k_n x [(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)^2 + (-a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)^2] dx$$

$$dE_n = \frac{1}{2}\delta\omega_n^2 \sin^2 k_n x [a_n^2 + b_n^2] dx$$

$$E_n = \frac{1}{2}\delta\omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2] \int_0^\ell \sin^2 k_n x dx \quad , \quad \int_0^\ell \sin^2 k_n x dx = \frac{\ell}{2}$$

$$E_n = \frac{1}{4}\delta\ell\omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2] \quad , \quad m = \delta\ell$$

$$E_n = \frac{1}{4}m\omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2]$$

$$\omega_n = ck_n \quad , \quad k_n \ell = n\pi/2 \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \quad c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}$$

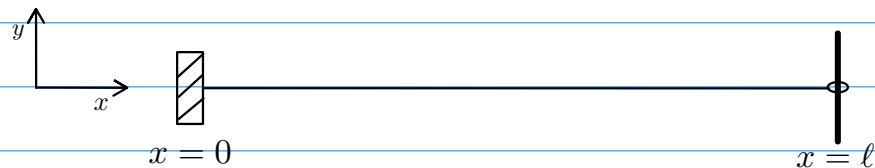
$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{1}{X} \frac{dX^2}{dx^2} = -k^2 \Rightarrow \frac{dX^2}{dx^2} + k^2 X = 0 \Rightarrow X \sim A \cos kx + B \sin kx$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT^2}{dt^2} = -\omega^2 \Rightarrow \frac{dT^2}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \Rightarrow T \sim C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

$$\omega = ck$$

$$y(x=0, t) = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) (x=\ell, t) = 0 \Rightarrow X(x=0) = \left(\frac{dX}{dx} \right) (x=\ell) = 0$$



$$X(x=0) = 0 : A = 0$$

$$\left(\frac{dX}{dx} \right) (x=\ell) = 0 : \cos k\ell = 0 \Rightarrow k_n \ell = (2n-1)\pi/2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) \sim B_n \sin k_n x$$

$$\omega_n = ck_n$$

$$y_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

که a_n و b_n با اعمال شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

$$dE_n = \frac{1}{2}dm \left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}dm\omega_n^2 y_n^2 \quad , \quad dm = \delta dx$$

$$dE_n = \frac{1}{2}\delta \left[\left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right)^2 + \omega_n^2 y_n^2 \right] dx$$

$$y_n(x, t) = \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$\left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right) (x, t) = \omega_n \sin k_n x (-a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t)$$

$$dE_n = \frac{1}{2}\delta\omega_n^2 \sin^2 k_n x [(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)^2 + (-a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)^2] dx$$

$$dE_n = \frac{1}{2}\delta\omega_n^2 \sin^2 k_n x [a_n^2 + b_n^2] dx$$

$$E_n = \frac{1}{2}\delta\omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2] \int_0^\ell \sin^2 k_n x dx \quad , \quad \int_0^\ell \sin^2 k_n x dx = \frac{\ell}{2}$$

$$E_n = \frac{1}{4}\delta\ell\omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2] \quad , \quad m = \delta\ell$$

$$E_n = \frac{1}{4}m\omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2]$$

$$\omega_n = ck_n \quad , \quad k_n \ell = (2n - 1)\pi/2 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \quad c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}$$

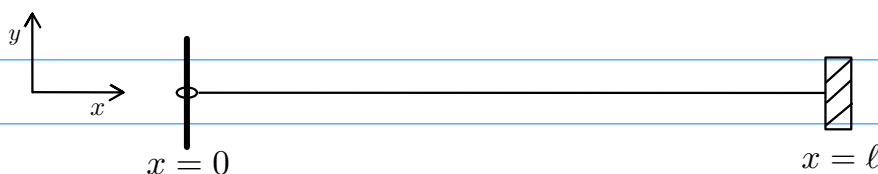
$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{1}{X} \frac{dX^2}{dx^2} = -k^2 \Rightarrow \frac{dX^2}{dx^2} + k^2 X = 0 \Rightarrow X \sim A \cos kx + B \sin kx$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT^2}{dt^2} = -\omega^2 \Rightarrow \frac{dT^2}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \Rightarrow T \sim C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

$$\omega = ck$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)(x=0, t) = y(x=\ell, t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{dX}{dx}\right)(x=0) = X(x=\ell) = 0$$



$$\left(\frac{dX}{dx}\right)(x=0) = 0 : B = 0$$

$$X(x=\ell) = 0 : \cos k\ell = 0 \Rightarrow k_n \ell = (2n-1)\pi/2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) \sim A_n \cos k_n x$$

$$\omega_n = ck_n$$

$$y_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \cos k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

که a_n و b_n با اعمال شرایط اولیه تعیین می شوند.

$$dE_n = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} dm \omega_n^2 y_n^2 \quad , \quad dm = \delta dx$$

$$dE_n = \frac{1}{2} \delta \left[\left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right)^2 + \omega_n^2 y_n^2 \right] dx$$

$$y_n(x, t) = \cos k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$\left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right) (x, t) = \omega_n \cos k_n x (-a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t)$$

$$dE_n = \frac{1}{2} \delta \omega_n^2 \cos^2 k_n x [(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)^2 + (-a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)^2] dx$$

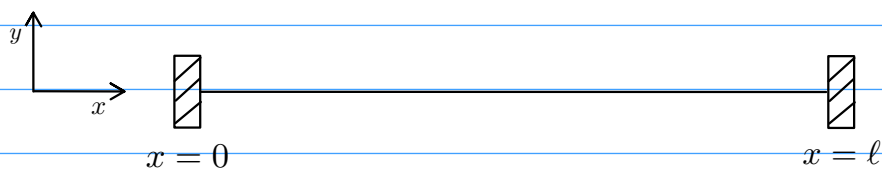
$$dE_n = \frac{1}{2} \delta \omega_n^2 \cos^2 k_n x [a_n^2 + b_n^2] dx$$

$$E_n = \frac{1}{2} \delta \omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2] \int_0^\ell \cos^2 k_n x dx \quad , \quad \int_0^\ell \cos^2 k_n x dx = \frac{\ell}{2}$$

$$E_n = \frac{1}{4} \delta \ell \omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2] \quad , \quad m = \delta \ell$$

$$E_n = \frac{1}{4} m \omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2]$$

$$\omega_n = ck_n \quad , \quad k_n \ell = (2n - 1)\pi/2 \quad n = 1, 2, \dots$$



$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$k_n \ell = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega_n = ck_n$$

شرایط اولیه $y_0(x) = y(x, t = 0)$, $v_0(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) (x, t = 0)$

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x$$

$$y_0(x) \sin k_m x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x \sin k_m x$$

$$\int_0^{\ell} y_0(x) \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\ell} \sin k_n x \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\ell}{2} \delta_{mn}$$

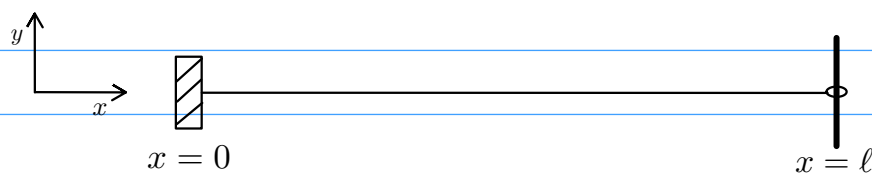
$$a_m = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) \sin k_m x dx$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin k_n x$$

$$v_0(x) \sin k_m x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin k_n x \sin k_m x$$

$$\int_0^{\ell} v_0(x) \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \int_0^{\ell} \sin k_n x \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \frac{\ell}{2} \delta_{mn}$$

$$b_m = \frac{2}{\ell \omega_m} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin k_m x dx$$



$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$k_n \ell = (2n - 1)\pi/2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\omega_n = ck_n$$

شرایط اولیه $y_0(x) = y(x, t = 0)$, $v_0(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) (x, t = 0)$

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x$$

$$y_0(x) \sin k_m x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x \sin k_m x$$

$$\int_0^{\ell} y_0(x) \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\ell} \sin k_n x \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\ell}{2} \delta_{mn}$$

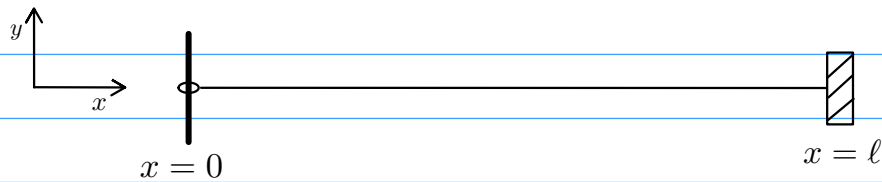
$$a_m = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) \sin k_m x dx$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin k_n x$$

$$v_0(x) \sin k_m x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin k_n x \sin k_m x$$

$$\int_0^{\ell} v_0(x) \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \int_0^{\ell} \sin k_n x \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \frac{\ell}{2} \delta_{mn}$$

$$b_m = \frac{2}{\ell \omega_m} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin k_m x dx$$



$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$k_n \ell = (2n - 1)\pi/2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\omega_n = ck_n$$

شرایط اولیه $y_0(x) = y(x, t = 0)$, $v_0(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) (x, t = 0)$

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x$$

$$y_0(x) \cos k_m x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x \cos k_m x$$

$$\int_0^{\ell} y_0(x) \cos k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\ell} \cos k_n x \cos k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\ell}{2} \delta_{mn}$$

$$a_m = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) \cos k_m x dx$$

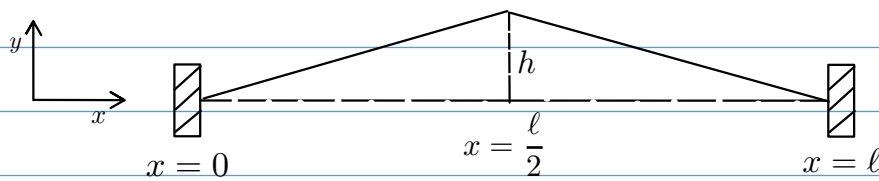
$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \cos k_n x$$

$$v_0(x) \cos k_m x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \cos k_n x \cos k_m x$$

$$\int_0^{\ell} v_0(x) \cos k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \int_0^{\ell} \cos k_n x \cos k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \frac{\ell}{2} \delta_{mn}$$

$$b_m = \frac{2}{\ell \omega_m} \int_0^{\ell} v_0(x) \cos k_m x dx$$

تحریک مضرابی (A Plucked String)



$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$k_n \ell = n\pi$$

$$\omega_n = ck_n$$

شرایط اولیه $y_0(x) = \begin{cases} (2h/\ell)x, & 0 \leq x \leq \ell/2 \\ -(2h/\ell)(x - \ell), & \ell/2 \leq x \leq \ell \end{cases}, \quad v_0(x) = 0$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) \sin k_n x dx$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \left(\frac{2h}{\ell} \int_0^{\ell/2} x \sin k_n x dx - \frac{2h}{\ell} \int_{\ell/2}^{\ell} (x - \ell) \sin k_n x dx \right)$$

$$a_n = \frac{4h}{\ell^2} \left(\left[-\frac{1}{k_n} x \cos k_n x + \frac{1}{k_n^2} \sin k_n x \right]_0^{\ell/2} - \left[-\frac{1}{k_n^2} (x - \ell) \cos k_n x + \frac{1}{k_n^2} \sin k_n x \right]_{\ell/2}^{\ell} \right)$$

$$a_n = \frac{4h}{\ell^2} \left(\left[-\frac{1}{k_n} \frac{\ell}{2} \cos k_n \ell/2 + \frac{1}{k_n^2} \sin k_n \ell/2 \right] + \left[\frac{1}{k_n} \frac{\ell}{2} \cos k_n \ell/2 + \frac{1}{k_n^2} \sin k_n \ell/2 \right] \right)$$

$$a_n = \frac{8h}{(k_n \ell)^2} \sin k_n \ell/2 \Rightarrow a_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

تارهای-مرتعش-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$b_n = \frac{2}{\ell \omega_n} \int_0^\ell v_0(x) \sin k_n x dx = 0$$

$$y(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} \sin k_n x \cos \omega_n t$$

انرژی هر مُد نوسانی

$$E_n = \frac{1}{4} m \omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2]$$

$$\omega_n = c k_n, \quad k_n \ell = n\pi$$

$$E_n = \frac{1}{4} m c^2 k_n^2 \left[\left(\frac{8h}{\pi^2 n^2} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2} + 0 \right], \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \pm 1, \quad \sin^2 \frac{n\pi}{2} = 1, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$E_n = \frac{16 m h^2 c^2}{\pi^2 \ell^2 n^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

انرژی کل

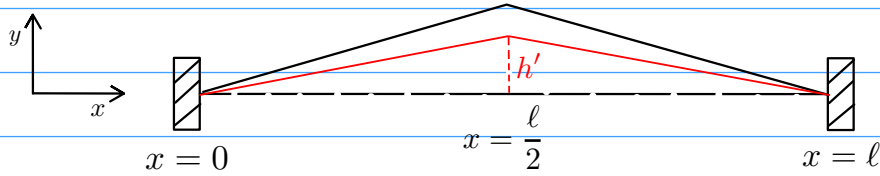
$$E = \sum_n E_n = \frac{16 m h^2 c^2}{\pi^2 \ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{اتحاد یار سوال})$$

$$E = \frac{2 m h^2 c^2}{\ell^2}$$

2.6

کار انجام شده برای ایجاد ارتعاش



$$F = 2T \sin \theta \quad , \quad \sin \theta = \tan \theta = \frac{2h'}{\ell}$$

$$F(h') = \frac{4T}{\ell} h'$$

$$W = \int_0^h F(h') dh'$$

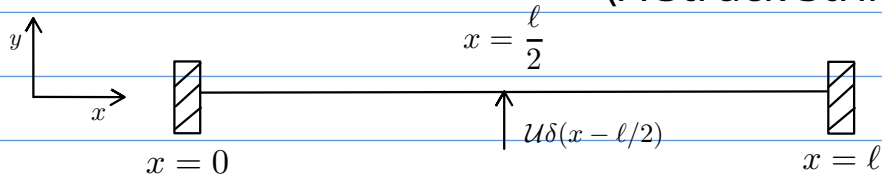
$$W = \frac{4T}{\ell} \int_0^h h' dh' = \frac{2Th^2}{\ell}$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\delta}} \quad , \quad \delta = \frac{m}{\ell}$$

$$T = c \frac{m}{\ell}$$

$$W = \frac{2mh^2c^2}{\ell^2}$$

تحریک ضربه‌ای (A Struck String)



$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$k_n \ell = n\pi$$

$$\omega_n = ck_n$$

شرایط اولیه $y_0(x) = 0$, $v_0(x) = \mathcal{U}\delta(x - \ell/2)$, $[\mathcal{U}] = m^2/s$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) \sin k_n x dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\ell \omega_n} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin k_n x dx = \frac{2\mathcal{U}}{\ell \omega_n} \int_0^{\ell} \delta(x - \ell/2) \sin k_n x dx$$

$$b_n = \frac{2\mathcal{U}}{\ell \omega_n} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{2\mathcal{U}}{\pi c} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$y(x, t) = \frac{2\mathcal{U}}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \sin k_n x \sin \omega_n t$$

انرژی هر مُد نوسانی

$$E_n = \frac{1}{4} m \omega_n^2 [a_n^2 + b_n^2]$$

$$\omega_n = ck_n \quad , \quad k_n \ell = n\pi$$

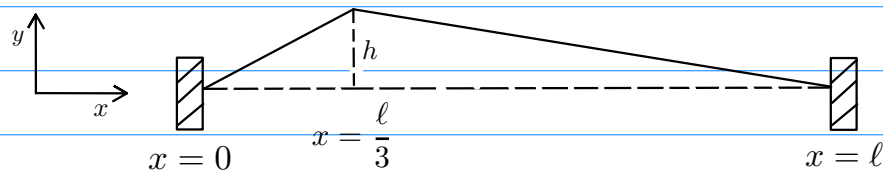
$$E_n = \frac{1}{4} mc^2 k_n^2 \left[\left(\frac{2\mathcal{U}}{\pi cn} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2} + 0 \right]$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \pm 1 \quad , \quad \sin^2 \frac{n\pi}{2} = 1 \quad , \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$E_n = m \frac{\mathcal{U}^2}{\ell^2} = \text{const.}$$

در این شرایط انرژی کل واگرا می‌شود. اینجا مشکل از روش حل و محاسبات نیست. مشکل از خود تابع دلتای دیراک است. مدل دلتای دیراک برای تحریک ضربه‌ای، یک مدل ایده‌آل است که در آن انرژی بینهایت توزیع شده و همه مدهای فرد سهم مساوی از این انرژی بینهایت می‌برند.

2.5



$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$k_n \ell = n\pi$$

$$\omega_n = ck_n$$

$$y_0(x) = \begin{cases} (3h/\ell)x, & 0 \leq x \leq \ell/3 \\ -(3h/2\ell)(x - \ell), & \ell/3 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) \sin k_n x dx \quad b_n = \frac{2}{\ell \omega_n} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin k_n x dx = 0$$

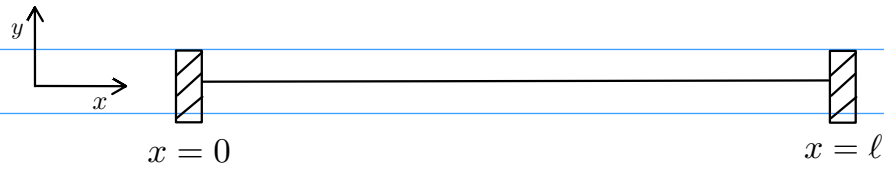
$$a_n = \frac{2}{\ell} \left[\frac{3h}{\ell} \int_0^{\ell/3} x \sin k_n x dx - \frac{3h}{2\ell} \int_{\ell/3}^{\ell} (x - \ell) \sin k_n x dx \right]$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \left[\frac{3h}{\ell} \left(-\frac{1}{k_n} x \cos k_n x + \frac{1}{k_n^2} \sin k_n x \right) \Big|_0^{\ell/3} - \frac{3h}{2\ell} \left(-\frac{1}{k_n} (x - \ell) \cos k_n x + \frac{1}{k_n^2} \sin k_n x \right) \Big|_{\ell/3}^{\ell} \right]$$

$$a_n = \frac{9h}{\pi^2 n^2} \sin(n\pi/3)$$

$$y(x, t) = \frac{9h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n^2} \sin k_n x \cos \omega_n t$$

2.7



$$v_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \ell/4 \\ 4v_0(x - \ell/4), & \ell/4 \leq x \leq \ell/2 \\ -4v_0(x - 3\ell/4), & \ell/2 \leq x \leq 3\ell/4 \\ 0, & 3\ell/4 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

شرایط اولیه بالا مشکل ابعاد دارد

$$v_0(x) = \frac{4v_0}{\ell} \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \ell/4 \\ (x - \ell/4), & \ell/4 \leq x \leq \ell/2 \\ -(x - 3\ell/4), & \ell/2 \leq x \leq 3\ell/4 \\ 0, & 3\ell/4 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell y_0(x) \sin k_n x dx = 0 \quad b_n = \frac{2}{\ell \omega_n} \int_0^\ell v_0(x) \sin k_n x dx$$

$$b_n = \frac{8v_0}{\ell^2 \omega_n} \left[\int_{\ell/4}^{\ell/2} (x - \ell/4) \sin k_n x dx - \int_{\ell/2}^{3\ell/4} (x - 3\ell/4) \sin k_n x dx \right]$$

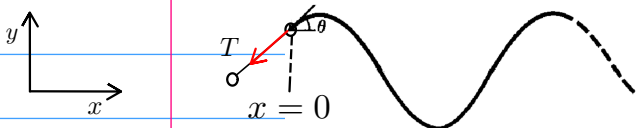
$$b_n = \frac{8v_0}{\ell^2 \omega_n} \left[\left(-\frac{1}{k_n} (x - \ell/4) \cos k_n x + \frac{1}{k_n^2} \sin k_n x \right) \Big|_{\ell/4}^{\ell/2} - \left(-\frac{1}{k_n} (x - 3\ell/4) \cos k_n x + \frac{1}{k_n^2} \sin k_n x \right) \Big|_{\ell/2}^{3\ell/4} \right]$$

$$b_n = \left(\frac{v_0 \ell}{c} \right) \left(\frac{8}{\pi^3} \right) \frac{1}{n^3} [-\sin(n\pi/4) + 2\sin(n\pi/2) - \sin(3n\pi/4)]$$

$$b_1 = 0.151 \frac{v_0 \ell}{c} \quad b_2 = 0$$

$$b_3 = -0.0326 \frac{v_0 \ell}{c} \quad b_4 = 0$$

ارتعاش واداشته در تار بی‌نهایت بلند



یک سر تار در $x = 0$ تحت تاثیر نیروی $F \cos \omega t$ قرار دارد.

سر دیگر تار در فاصله دور $x = 0$ به پایه‌ای محکم شده است.

تار در $x = 0$ فقط در امتداد y با فرکانس ω نوسان می‌کند.

نوسانات در تار توسط یک دسته که از یک انتها ثابت و از انتهای دیگر به تار متصل است

با فرکانس ω نوسان می‌کند.

چون درازای تار بی‌نهایت فرض شده است، موج بازتابی در آن ایجاد نمی‌شود.

$$y = A_1 \sin(\omega t - kx) + A_2 \cos(\omega t - kx)$$

نمایش مختلط موج پیشرونده

$$y = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

که A یک عدد مختلط است. نمایش نیروی واداشته بصورت مختلط

$$f = Fe^{i\omega t}$$

که F یک عدد حقیقی است.

تار در $x = 0$ و در لحظه معین با افق زاویه θ می‌سازد که

$$\sin \theta = \tan \theta = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}$$

اگر کشش تار T فرض شود نیروی موثر وارد بر تار در امتداد y برابر

$$f(x=0, t) = -T \sin \theta$$

که می‌توان در تقریب برابر با

$$f(x=0, t) = -T \tan \theta = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}$$

در ادامه قصد داریم امپدانس تار را در $x = 0$ بدست آوریم

$$F e^{i\omega t} = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}$$

$$y = A e^{i(\omega t - kx)} : \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = i A k e^{i(\omega t - kx)}$$

$$F e^{i\omega t} = -i A k T e^{i\omega t} \Rightarrow A = \frac{F}{-i k T}$$

$$y = \frac{F}{i k T} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{F \omega}{k T} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$v(x=0, t) = \frac{F \omega}{k T} e^{i\omega t} = \frac{\omega}{k T} (F e^{i\omega t})$$

$$v(x=0, t) = \frac{\omega}{k T} f(t) \quad , \quad v(x=0, t) = \frac{1}{Z_s} f(t)$$

$$\text{امپدانس ورودی تار} \quad Z_s = \frac{k T}{\omega} = \frac{k T}{c k} = \frac{c^2 \delta}{c} = c \delta = \sqrt{T \delta}$$

امپدانس حقیقی است و قسمت موهومی ندارد.

این را می‌رساند که تا در مقابل نیروی واداشته مقاومت می‌کند.

امپدانس ورودی تابع چگالی خطی و کشش تار است

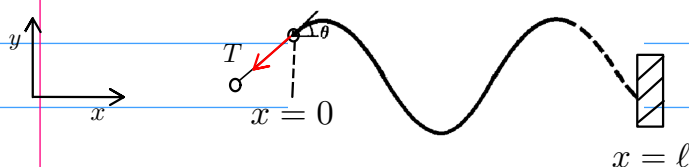
و به نیروی واداشته که به تار وارد می‌شود بستگی ندارد

توان متوسط در $x = 0$

$$\text{توان لحظه‌ای} \quad W(x=0, t) = \text{Re}[v(x=0, t)] \text{Re}[f(t)] = \frac{F^2}{c \delta} \cos^2 \omega t$$

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \int_0^T W(x=0, t) dt = \frac{F^2}{c \delta} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{F^2}{2 c \delta}$$

یعنی توانی بوسیله تار گرفته می‌شود.



ارتعاش واداشته در تار بطول محدود

یک سر تار در $x = 0$ تحت تاثیر نیروی $F \cos \omega t$ قرار دارد.

سر دیگر تار در فاصله دور $x = l$ به پایه‌ای محکم شده است.

نمایش مختلط موج پیشرونده و پسرونده

$$y = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}$$

شرط مرزی در انتهای چپ $x = 0$

$$Fe^{i\omega t} = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}$$

$$Fe^{i\omega t} = -T[-ikA + ikB]e^{i\omega t} \Rightarrow F = ikT(A - B)$$

شرط مرزی در انتهای راست $x = l$

$$Ae^{-ikl} + Be^{ikl} = 0$$

حل دستگاه معادلات دو مجهولی

$$A - B = \frac{F}{ikT}, \quad Ae^{-ikl} + Be^{ikl} = 0$$

بنابراین

$$A = \frac{Fe^{ikl}}{2ikT \cos kl}, \quad B = -\frac{Fe^{-ikl}}{2ikT \cos kl}$$

$$y = \frac{Fe^{i\omega t}}{kT} \frac{\sin k(\ell - x)}{\cos kl}$$

$$v = \frac{i\omega Fe^{i\omega t}}{kT} \frac{\sin k(\ell - x)}{\cos kl} = \frac{iFe^{i\omega t}}{T/c} \frac{\sin k(\ell - x)}{\cos kl}$$

قسمت حقیقی

$$y = \frac{F \cos \omega t \sin k(\ell - x)}{kT \cos k\ell}$$

اگر $y(x = 0, t) = \frac{F \tan k\ell}{kT} \cos \omega t = y_0 \cos \omega t$

تغییر مکان در $x = 0$ $y_0 = \frac{F \tan k\ell}{kT}$

اگر $y(x = \ell, t) = 0$

همه گره‌های بین $x = \ell$ و $x = 0$

$$\sin k(\ell - x) = 0 : \quad k(\ell - x) = q\pi, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_q = \ell - (q/k)\pi, \quad \lambda = 2\pi/k$$

$$x_q = \ell - q\lambda/2$$

$$x_q \geq 0 \Rightarrow \ell - q\lambda/2 \geq 0 \Rightarrow q \leq 2\ell/\lambda$$

$$x_q = \ell - q\lambda/2, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \leq (2\ell/\lambda)$$

فاصله بین هر دو گره متوالی $x_{q+1} - x_q = -\lambda/2$

ماکزیمم شدن دامنه شکم‌ها $\cos k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

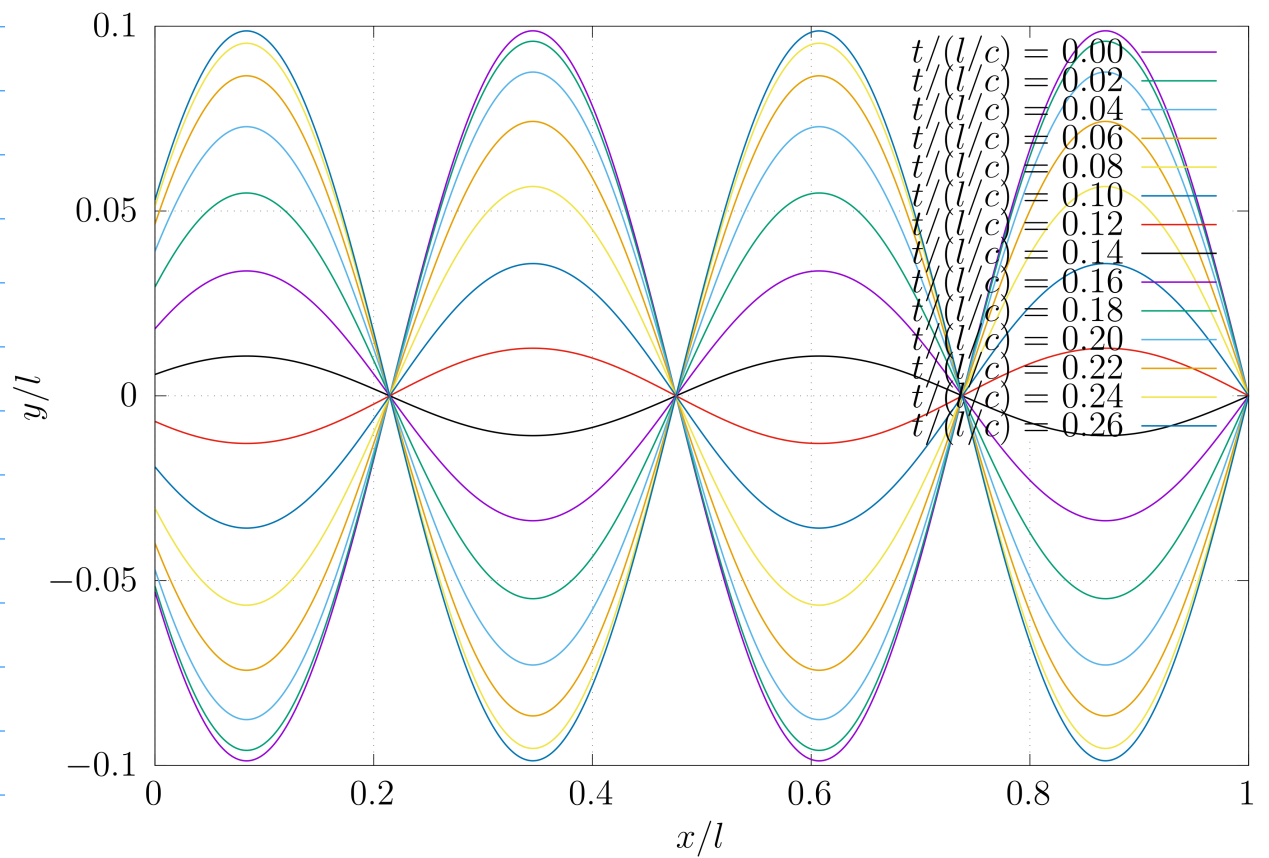
مینیمم شدن دامنه شکم‌ها $\cos k\ell = \pm 1 \Rightarrow k\ell = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{y}{\ell} = \frac{F}{T} \frac{1}{k\ell} \cos[(k\ell)t/(\ell/c)] \frac{\sin[(k\ell)(1 - x/\ell)]}{\cos k\ell}$$

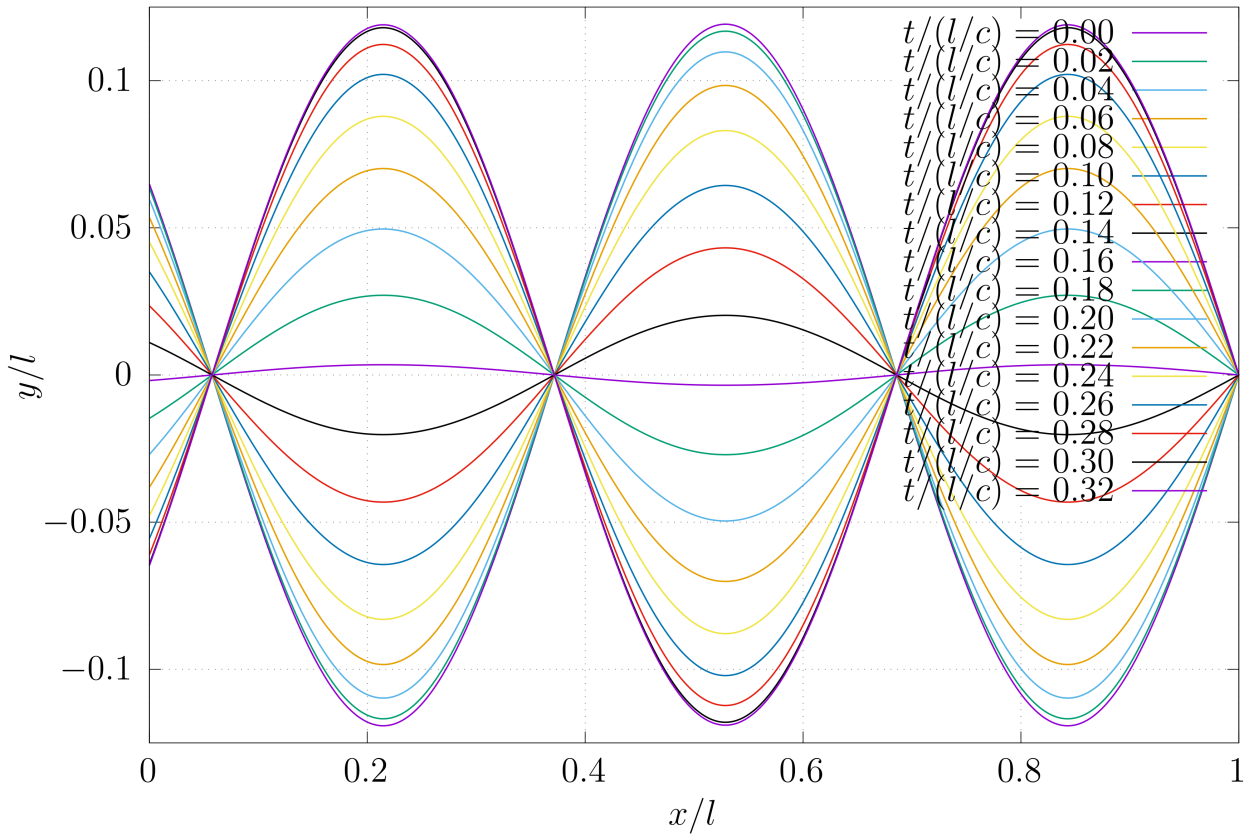
$$\tilde{y} = \frac{y}{\ell}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\ell/c}$$

$$\tilde{y} = \frac{F}{T} \frac{1}{(k\ell)} \frac{\cos[(k\ell)\tilde{t}] \sin[(k\ell)(1 - \tilde{x})]}{\cos k\ell}$$

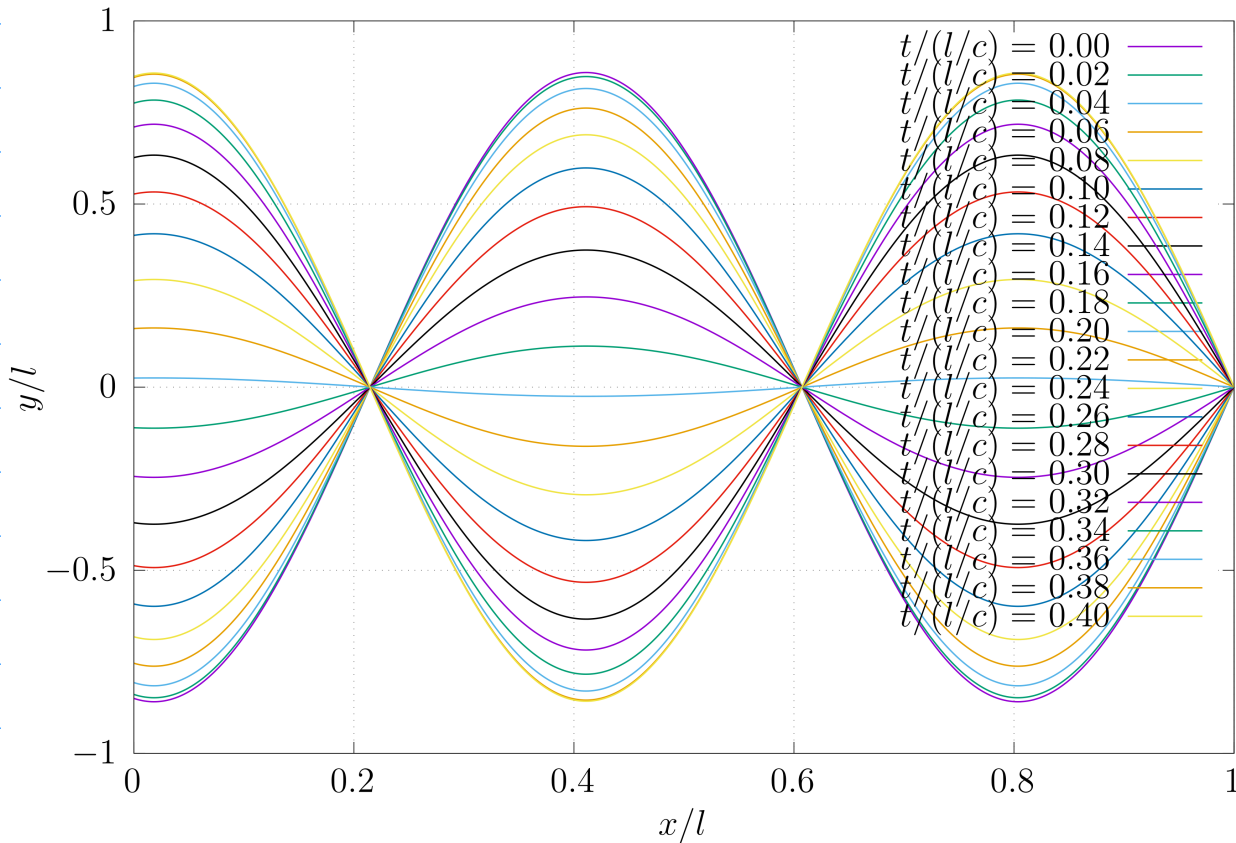
$$k\ell = 12, \quad \frac{F}{T} = 1$$



$$k\ell = 10, \quad \frac{F}{T} = 1$$



$$k\ell = 8, \quad \frac{F}{T} = 1$$



در ادامه قصد داریم امپدانس تار را در $x = 0$ بدست آوریم

$$y = \frac{F e^{i\omega t}}{kT} \frac{\sin k(\ell - x)}{\cos k\ell}$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{i\omega}{kT} F e^{i\omega t} \frac{\sin k(\ell - x)}{\cos k\ell}$$

$$v(x = 0, t) = \frac{i\omega}{kT} \tan k\ell (F e^{i\omega t})$$

$$v(x = 0, t) = \frac{i\omega}{kT} (\tan k\ell) f(t) \quad , \quad v(x = 0, t) = \frac{1}{Z_s} f(t)$$

$$\text{امپدانس ورودی تار} \quad Z_s = -i \frac{kT}{\omega} \cot k\ell = -i c \delta \cot k\ell$$

امپدانس موهومی و مقدار منفی دارد.

یعنی تار اتلاف انرژی ندارد

توان متوسط در $x = 0$

$$\text{توان لحظه‌ای} \quad W(x = 0, t) = \text{Re}[v(x = 0, t)] \text{Re}[f(t)] = -\frac{\omega F^2}{kT} \tan k\ell \sin \omega t \cos \omega t$$

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \int_0^T W(x = 0, t) dt = -\frac{\omega F^2}{kT} \tan k\ell \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$$

یعنی توانی بوسیله تار گرفته نمی‌شود.

برای $k\ell$ های کوچک:

$$\cot k\ell \sim \frac{1}{k\ell}$$

$$Z_s \sim -i \frac{T}{\omega \ell} \sim -i \frac{\delta c}{k\ell}$$

2.8

تار یکنواختی بطول ℓ بین دو پایه ثابت کشیده شده و با نیروی واداشته $F \cos \omega t$

وارد به نقطه وسط آن به ارتعاش در می‌آید.

(الف) نشان دهید که دامنه ارتعاش در وسط سیم برابر $(F/2kT) \tan(k\ell/2)$ است.

(ب) امپدانس مکانیکی را در این نقطه حساب کنید.

(ت) دامنه تغییر مکان را در نقطه $x = \ell/4$ حساب کنید

جواب معادله موج

$$y(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$$

نمایش موج پیشرونده و پسرونده در دو طرف وسط سیم

$$0 \leq x \leq \ell/2 : X_1(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$$

$$\ell/2 \leq x \leq \ell : X_2(x) = Ce^{-ikx} + De^{ikx}$$

شرط مرزی در انتهای چپ $x = 0$

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$X_1(x) = -2iA \sin(kx)$$

$$y_1(x, t) = -2iA \sin(kx)e^{i\omega t}$$

شرط مرزی در انتهای چپ $x = \ell$

$$Ce^{-ik\ell} + De^{ik\ell} = 0 \Rightarrow D = -Ce^{-2ik\ell}$$

$$X_2(x) = 2iCe^{-ik\ell} \sin k(\ell - x)$$

$$y_2(x, t) = 2iCe^{-ik\ell} \sin k(\ell - x)e^{i\omega t}$$

پیوستگی معادله موج در دو طرف $x = \ell/2$

$$y_1(x = \ell/2, t) = y_2(x = \ell/2, t)$$

$$-2iA \sin(k\ell/2) = 2iCe^{-ik\ell} \sin(k\ell/2) \Rightarrow A = -Ce^{-ik\ell}$$

بنابراین

$$y_1(x, t) = -2iA \sin kx e^{i\omega t}$$

$$y_2(x, t) = -2iA \sin k(\ell - x) e^{i\omega t}$$

نا پیوستگی معادله موج در دو طرف $x = \ell/2$

$$F e^{i\omega t} = -T \left[\left(\frac{\partial y_2}{\partial x} \right)_{x=\ell/2} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right)_{x=\ell/2} \right]$$

$$F e^{i\omega t} = -T [2iAk \cos k\ell/2 + 2iAk \cos k\ell/2] e^{i\omega t}$$

$$F = -4iAkT \cos k\ell/2 \Rightarrow A = -\frac{F}{4ikT} \frac{1}{\cos k\ell/2}$$

$$y_1(x, t) = \frac{F}{2kT} \frac{1}{\cos k\ell/2} \sin kx e^{i\omega t}$$

$$y_2(x, t) = \frac{F}{2kT} \frac{1}{\cos k\ell/2} \sin k(\ell - x) e^{i\omega t}$$

دامنه ارتعاشات در وسط سیم: $\frac{F}{2kT} \tan(k\ell/2)$

$$v_1(x, t) = \frac{i\omega}{2kT} \frac{1}{\cos k\ell/2} \sin kx (F e^{i\omega t})$$

$$v_2(x, t) = \frac{i\omega}{2kT} \frac{1}{\cos k\ell/2} \sin k(\ell - x) (F e^{i\omega t})$$

$$\mathbf{v}_1(x = \ell/2, t) = \mathbf{v}_2(x = \ell/2, t) = \frac{1}{Z_s} f(t), \quad f(t) = F e^{i\omega t}$$

امپدانس در وسط تار $Z_s = -\frac{2ikT}{\omega} \cot(k\ell/2) = -2i\delta c \cot(k\ell/2)$

کاملاً موهومی است (بدون بخش حقیقی) و اتلافی نداریم.

انرژی نمی‌تواند از سیستم خارج شود (مرزهای بسته).

$$\mathbf{y}_1(x = \ell/4, t) = -\frac{F}{2kT} \frac{\sin k\ell/4}{\cos k\ell/2} e^{i\omega t}$$

دامنه ارتعاشات در $x = \ell/4$: $\frac{F}{2kT} \frac{\sin k\ell/4}{\cos k\ell/2}$

مقاومت مکانیکی دیده شده توسط نیروی اعمال شده که رشته‌ای بی‌نهایت را در فاصله ℓ از انتهای ثابت رانده است، ارزیابی کنید.
عبارات جداگانه در مقاومت مکانیکی را تفسیر کنید.

جواب معادله موج

$$y(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$$

نمایش موج پیشرونده و پسرونده در دو طرف $x = \ell$

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \ell : & \quad X_1(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \\ \ell \leq x & \quad X_2(x) = Ce^{-ikx} \end{aligned}$$

شرط مرزی در انتهای چپ $x = 0$

$$B = -A$$

$$X_1(x) = A(e^{-ikx} - e^{ikx})$$

$$y_1(x, t) = A(e^{-ikx} - e^{ikx})e^{i\omega t}$$

$$y_2(x, t) = Ce^{-ikx}e^{i\omega t}$$

پیوستگی معادله موج در دو طرف $x = \ell$

$$y_1(x = \ell, t) = y_2(x = \ell, t)$$

$$A(e^{-ik\ell} - e^{ik\ell}) = Ce^{-ik\ell} \Rightarrow C = -2iAe^{ik\ell} \sin k\ell$$

بنابراین

$$y_1(x, t) = -2iA \sin kx e^{i\omega t}$$

$$y_2(x, t) = -2iA \sin k\ell e^{ik(\ell-x)} e^{i\omega t}$$

نایبوستگی معادله موج در دو طرف $x = \ell$

$$F e^{i\omega t} = -T \left[\left(\frac{\partial y_2}{\partial x} \right)_{x=\ell/2} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right)_{x=\ell/2} \right]$$

$$F e^{i\omega t} = -T [-2Ak \sin k\ell + 2iAk \cos k\ell] e^{i\omega t}$$

$$F = -2ikTA [i \sin k\ell + \cos k\ell] = -2ikTA e^{ik\ell} \Rightarrow A = -\frac{F}{2ikT} e^{-ik\ell}$$

$$y_1(x, t) = \frac{F}{kT} e^{-ik\ell} \sin kx e^{i\omega t}$$

$$y_2(x, t) = \frac{F}{kT} \sin k\ell e^{-ikx} e^{i\omega t}$$

$$x = \ell \text{ دامنه ارتعاشات در: } \frac{F}{kT} e^{ik\ell} \sin k\ell$$

$$v_1(x, t) = \frac{i\omega}{kT} e^{-ik\ell} \sin kx (F e^{i\omega t})$$

$$v_2(x, t) = \frac{i\omega}{kT} \sin k\ell e^{-ikx} (F e^{i\omega t})$$

$$v_1(x = \ell, t) = v_2(x = \ell, t) = \frac{1}{Z_s} f(t), \quad f(t) = F e^{i\omega t}$$

$$\text{امپدانس } Z_s = -\frac{ikT}{\omega} \frac{e^{ik\ell}}{\sin k\ell} = -\frac{kT}{\omega} \frac{\cos k\ell + i \sin k\ell}{\sin k\ell} = c\delta(-i \cot k\ell + 1)$$

مطابق

$$Z_m = R_m + i(m\omega - s/\omega)$$

قسمت حقیقی نشان می دهد که انرژی به سمت راست یعنی از L به بینهایت نشتی می کند

امپدانس موهومی منفی برای ($\cot k\ell > 0$) رفتار فنی غالب را نشان می دهد

امپدانس موهومی مثبت برای ($\cot k\ell < 0$) رفتار اینرسی غالب را نشان می دهد.