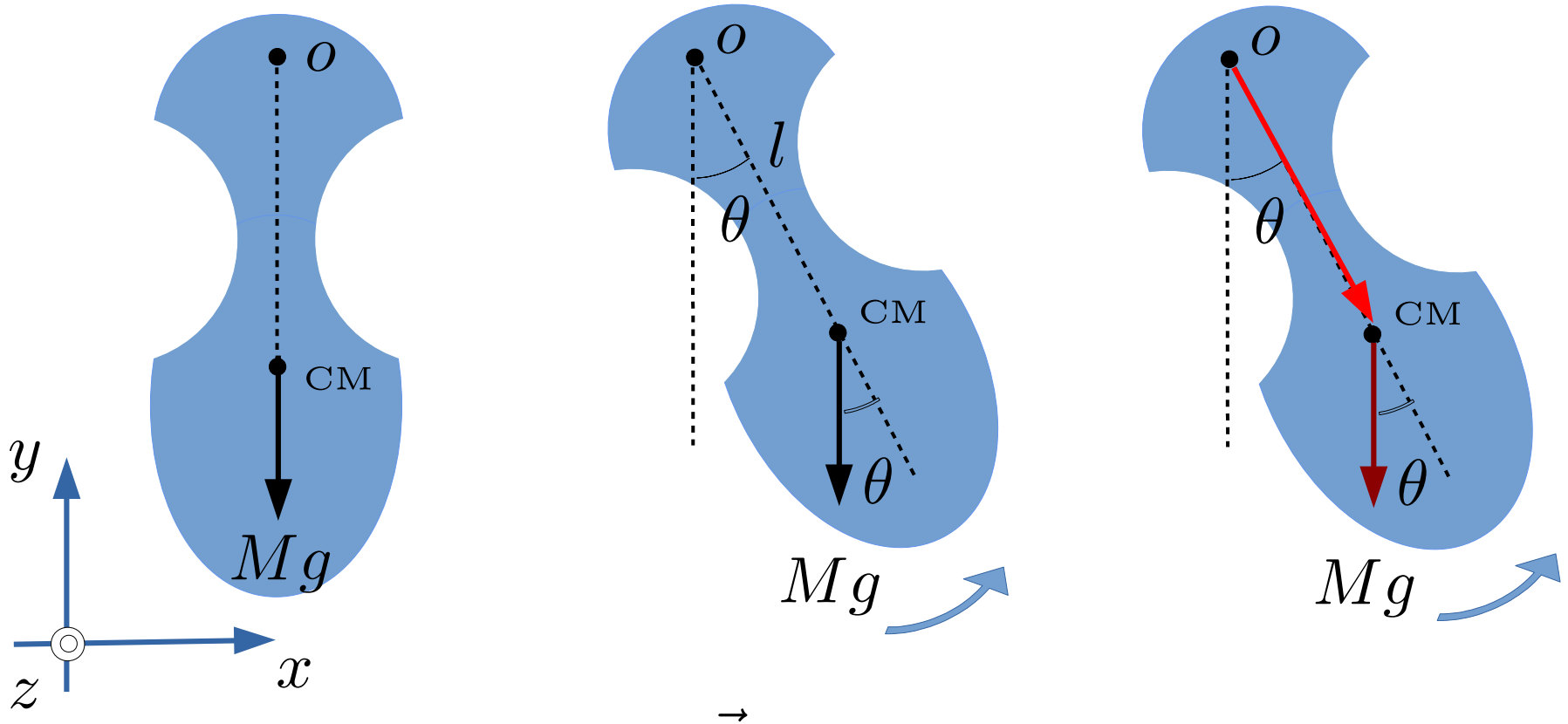
جلسه هفتم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

حرکت اجسام صلب در صفحه

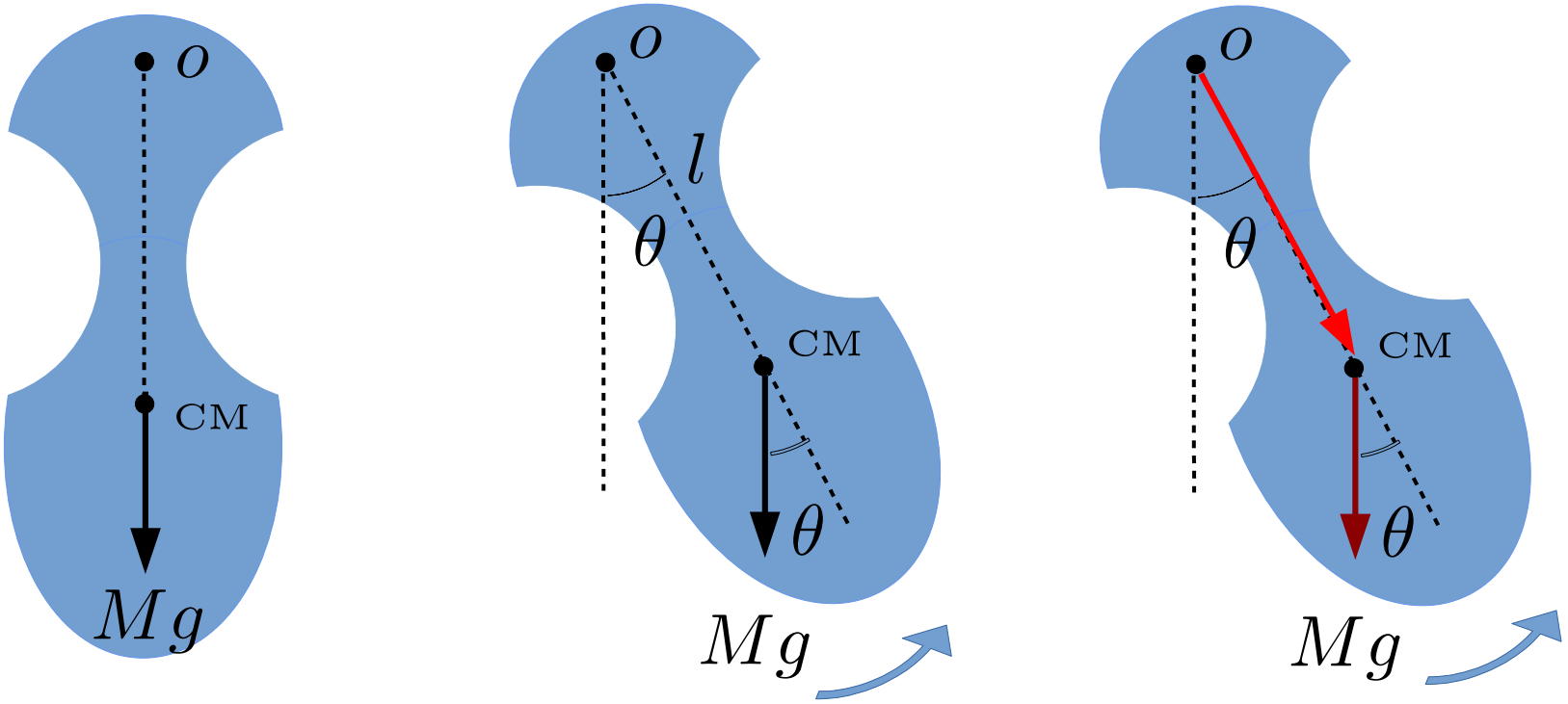


$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \tau = -mgl\sin\theta$$

$$\vec{\tau} = \tau\hat{z}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \tau = -mgl \sin\theta$$

$$\vec{\tau} = \tau \hat{z}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

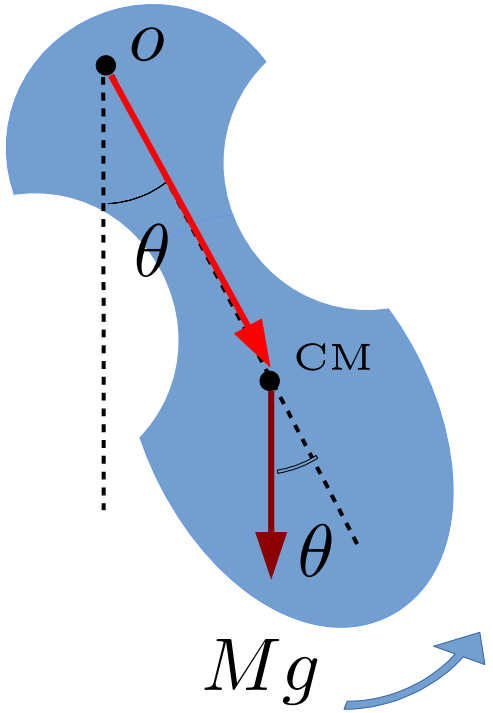
روش اول

$$\tau = \mathbb{I}_o \alpha = \mathbb{I}_o \ddot{\theta}$$

$$\tau = -Mgl \sin\theta$$

$$\mathbb{I}_o \ddot{\theta} = -Mgl \sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{\mathbb{I}_o} \sin\theta = 0}$$



$$\sin\theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgl}{\mathbb{I}_o}\theta = 0$$

معادله نوسانگر ساده

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{\mathbb{I}_o}}$$

حرکت اجسام صلب در صفحه

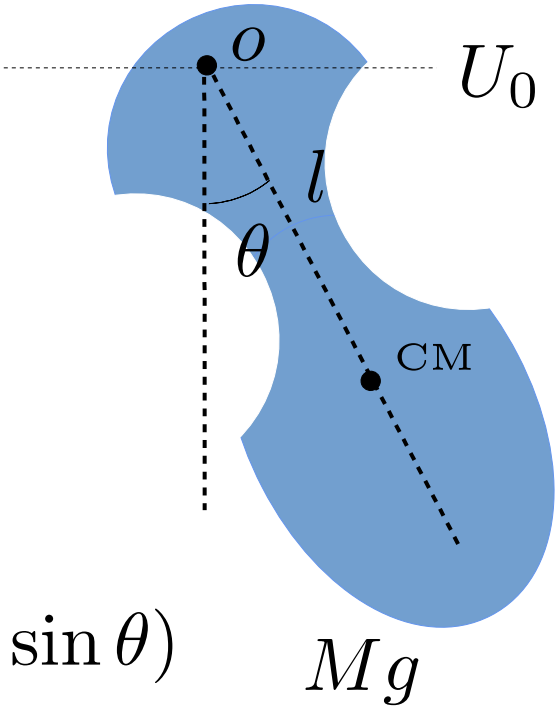
روش دوم

$$E = \frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\theta}^2 + U(\theta)$$

$$U(\theta) = -Mgl\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\theta}^2 - Mgl\cos\theta\right)$$

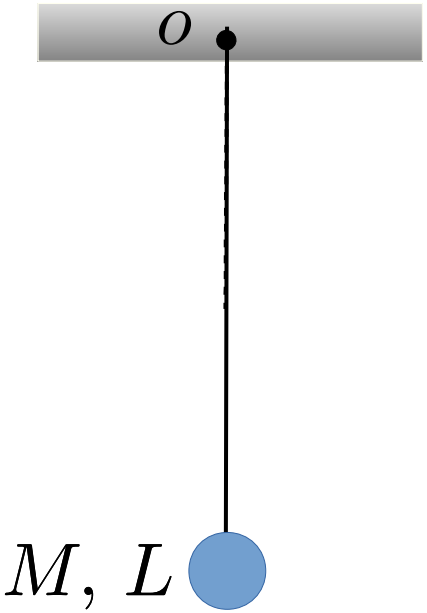
$$\theta = \theta(t)$$ می‌دانیم



$$0 = \mathbb{I}_o\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mgl\dot{\theta}\sin\theta = \dot{\theta}(\mathbb{I}_o\ddot{\theta} + Mgl\sin\theta)$$

$$\mathbb{I}_o\ddot{\theta} + Mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{\mathbb{I}_o}\sin\theta = 0}$$

حرکت اجسام صلب در صفحه

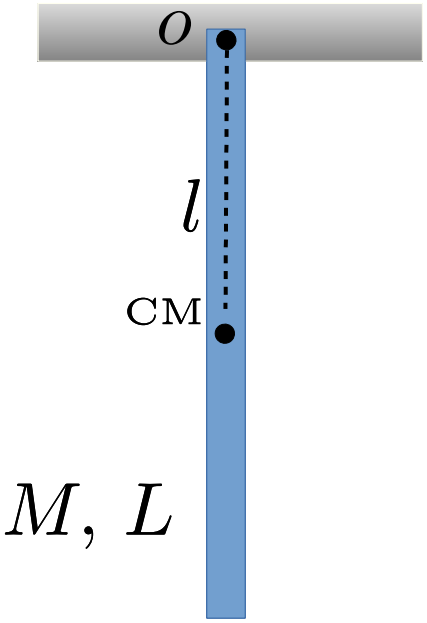


$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{\mathbb{I}_o}}$$

$$\mathbb{I}_o = ML^2, \qquad l = L$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{ML^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

حرکت اجسام صلب در صفحه



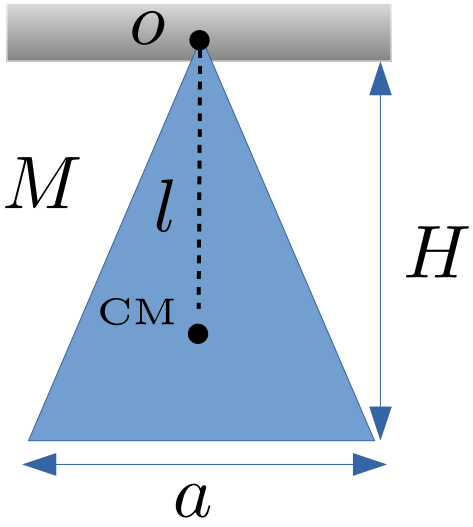
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{\mathbb{I}_o}}$$

$$\mathbb{I}_o = \frac{1}{3}ML^2, \quad l = \frac{L}{2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{\mathbb{I}_o}}$$

$$\mathbb{I}_{\rm CM} = \frac{1}{24}Ma^2 + \frac{1}{18}MH^2,$$

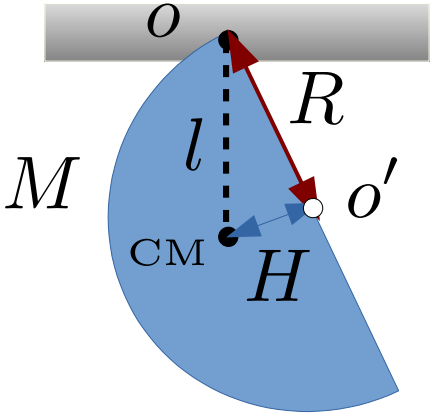
$$\mathbb{I}_o = \mathbb{I}_{\rm CM} + \frac{4}{9}MH^2,$$

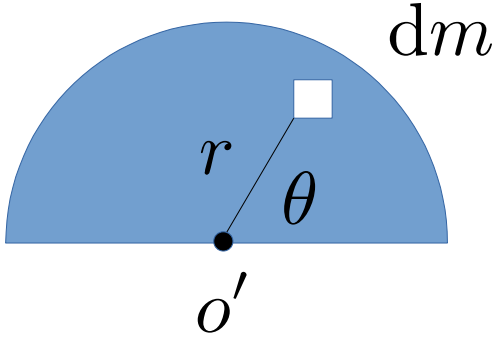
$$\mathbb{I}_o = \frac{1}{24}Ma^2 + \frac{1}{2}MH^2, \qquad l = \frac{2H}{3}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{16gH}{a^2 + 12H^2}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه





$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{\mathbb{I}_o}}$$

$$X = 0, \quad Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m$$

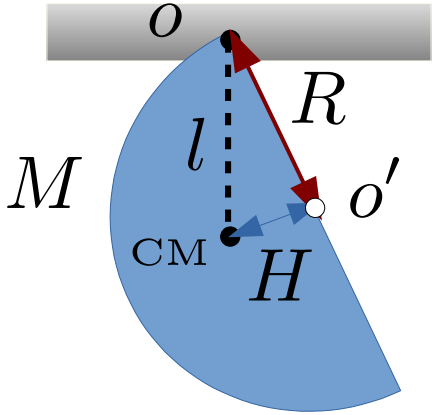
$$Y = \frac{1}{M}\int (r\sin\theta)\frac{2M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

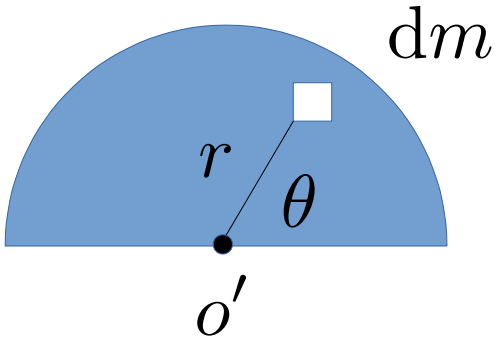
$$= \frac{2}{\pi R^2}\left(\int_0^R r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$Y = H = \frac{4R}{3\pi}, \quad l = R\sqrt{1+\frac{16}{9\pi^2}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه





$$\mathbb{I}_o = \mathbb{I}_{\rm CM} + Ml^2$$

$$\mathbb{I}_{o'} = \mathbb{I}_{\rm CM} + MH^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{\mathbb{I}_o}}$$

$$\mathbb{I}_{o'} = \int r^2 \mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi R^2} \int r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

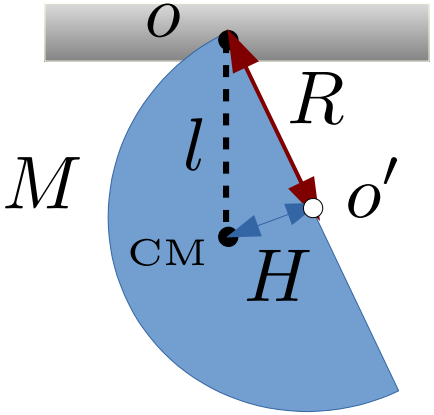
$$= \frac{2M}{\pi R^2} \left(\int_0^R r^3 \mathrm{d}r \right) \left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \right)$$

$$\mathbb{I}_{o'} = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{I}_o = \mathbb{I}_{o'} + M(l^2 - H^2) = \mathbb{I}_{o'} + MR^2$$

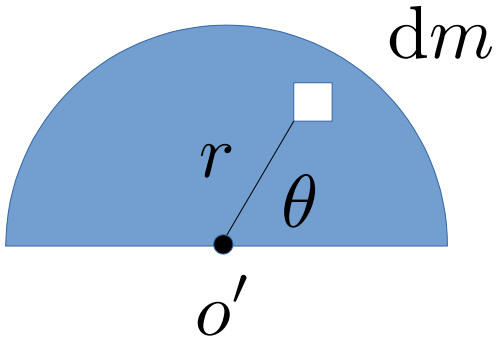
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{\mathbb{I}_o}}$$

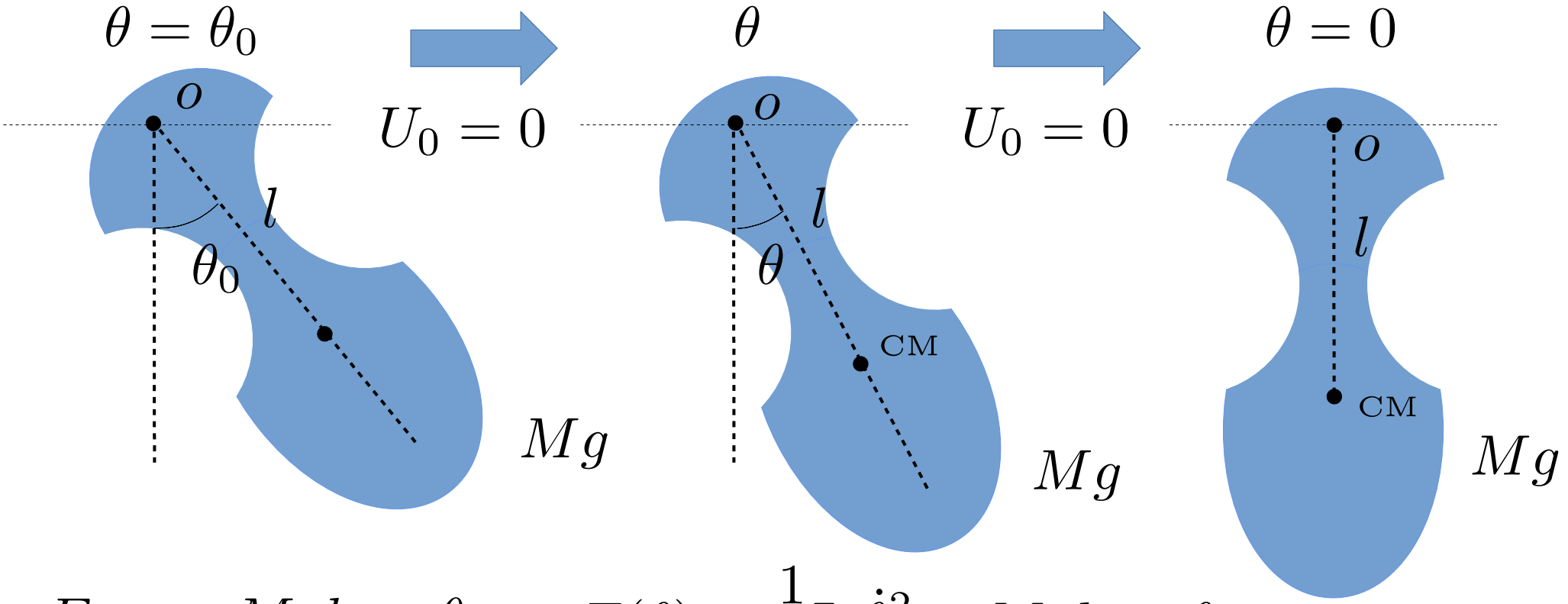
$$\mathbb{I}_o = \frac{3}{2}MR^2, \qquad l = R\sqrt{1+\frac{16}{9\pi^2}}$$



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}\sqrt{1+\frac{16}{9\pi^2}}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$E_0 = -Mgl\cos\theta_0 \qquad E(\theta) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\theta}^2 - Mgl\cos\theta$$

$$E(\theta) = E_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2Mgl}{\mathbb{I}_o}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$0 \longrightarrow \theta_0$$

$$0 \le t \le \frac{T}{4}$$

محمدرضا مظفری — گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2Mgl}{\mathbb{I}_o}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} \Rightarrow \sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{2Mgl}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \mathrm{d}t$$

$$\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{2Mgl}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int_0^{\frac{T}{4}}\mathrm{d}t = \frac{T}{4}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{2Mgl}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$\theta' = -\theta \Rightarrow \mathrm{d}\theta' = -\mathrm{d}\theta$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{2Mgl}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta'}{\sqrt{\cos\theta' - \cos\theta_0}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

$$T = 4\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{2Mgl}}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta'}{\sqrt{\cos\theta' - \cos\theta_0}} \qquad \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta' - \cos\theta_0 = 2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta'}{2}\right) \qquad k = \sin\frac{\theta_0}{2}$$

$$\cos\theta' - \cos\theta_0 = 2k^2\left(1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\frac{\theta'}{2}\right)$$

$$\frac{1}{k}\sin\frac{\theta'}{2} = \sin\phi, \quad \mathrm{d}\theta' = \frac{2k\cos\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}\mathrm{d}\phi$$

$$\theta' = 0 \longrightarrow \phi = 0, \quad \theta' = \theta_0 \longrightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

$$T = 4\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{Mgl}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

$$\int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = F(k, \phi)$$ انتگرال بیضوی غیرکامل از نوع اول

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = F(k, \pi/2)$$ انتگرال بیضوی کامل از نوع اول

$$T = 4\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{Mgl}} F(k, \pi/2), \qquad k = \sin \frac{\theta_0}{2}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

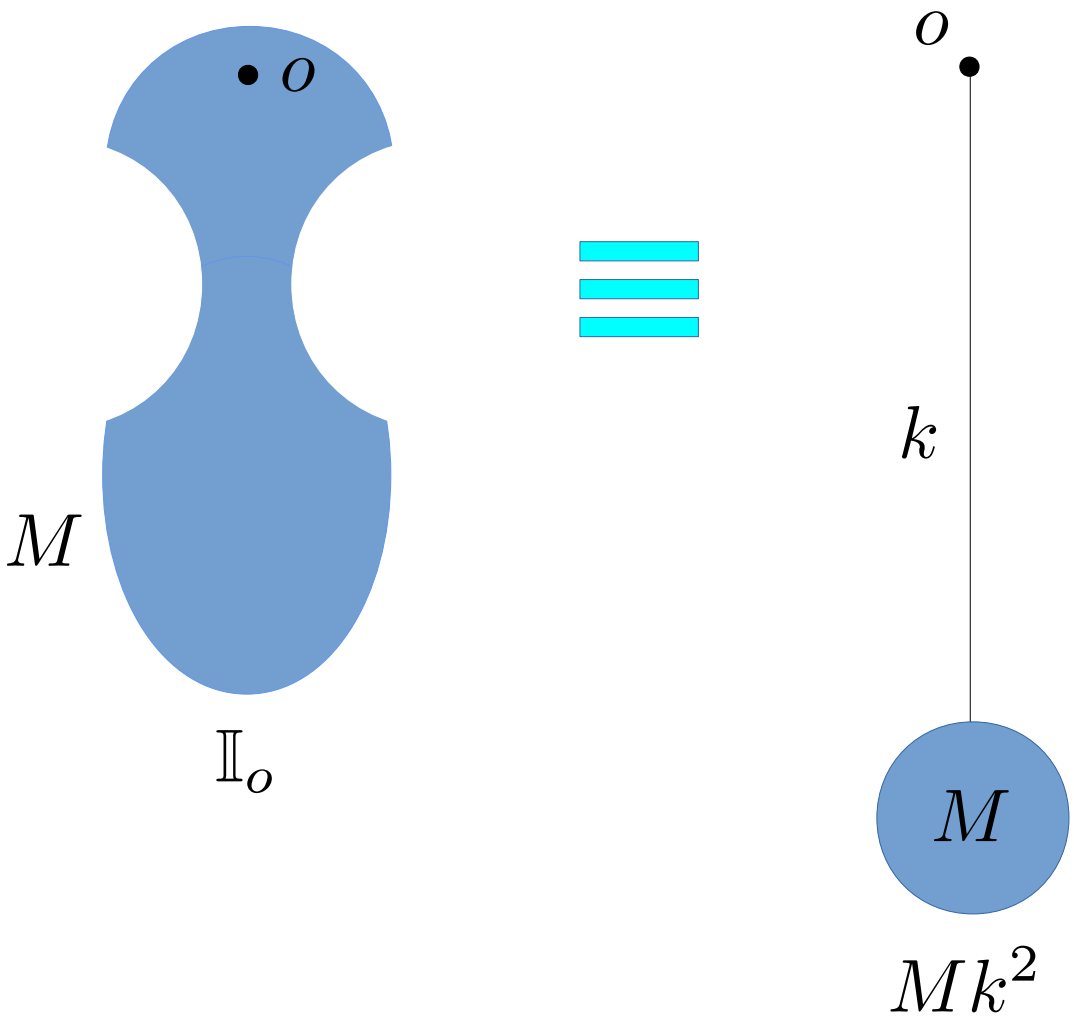
حرکت اجسام صلب در صفحه

$$T = 4\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{Mgl}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = 4\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{Mgl}}F(k,\pi/2)$$

Amplitude, θ_0	$k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$	$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	**Period, T**
0°	0	$1.5708 = \pi/2$	T_0
10°	0.0872	1.5738	$1.0019\,T_0$
45°	0.3827	1.6336	$1.0400\,T_0$
90°	0.7071	1.8541	$1.1804\,T_0$
135°	0.9234	2.4003	$1.5281\,T_0$
178°	0.99985	5.4349	$3.5236\,T_0$
179°	0.99996	5.2660	$4.6002\,T_0$
180°	1	∞	∞

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



شعاع چرخش

$$k = ?$$

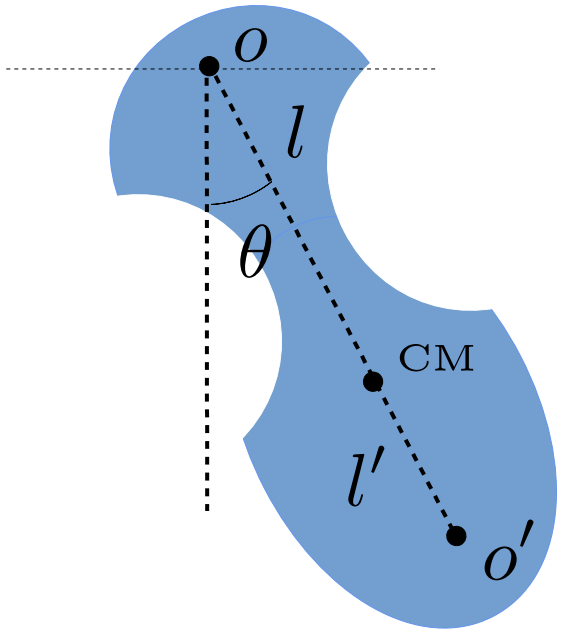
$$\mathbb{I}_o = Mk^2$$

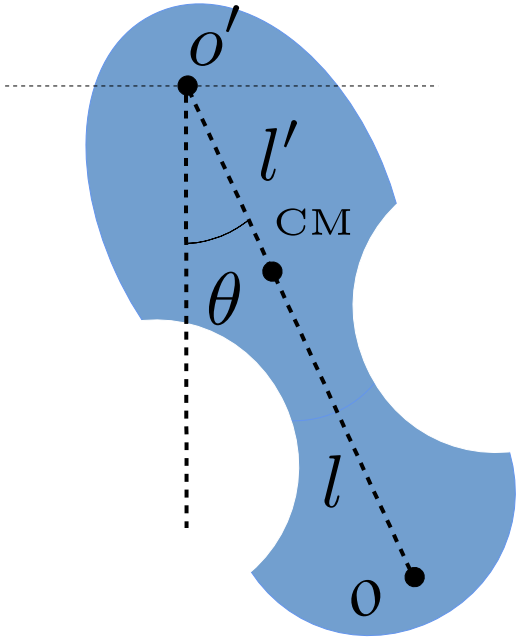
$$k = \sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{M}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

مرکز نوسان



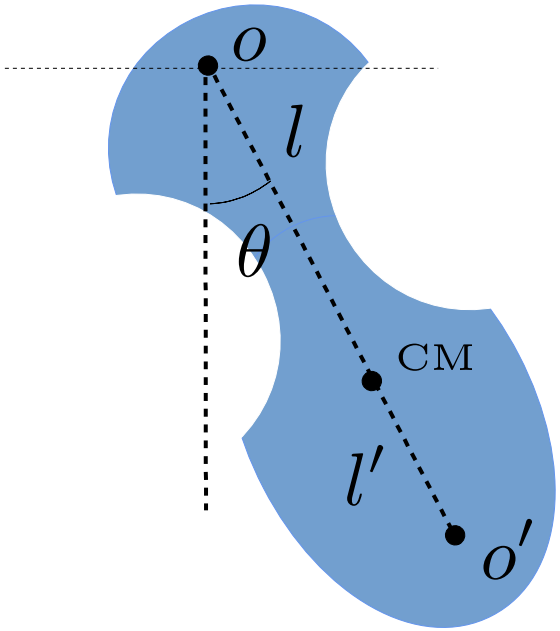


$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{Mgl}}$$

$$T_{o'} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathbb{I}_{o'}}{Mgl'}}$$

$$T_o = T_{o'}$$

حرکت اجسام صلب در صفحه



مرکز نوسان

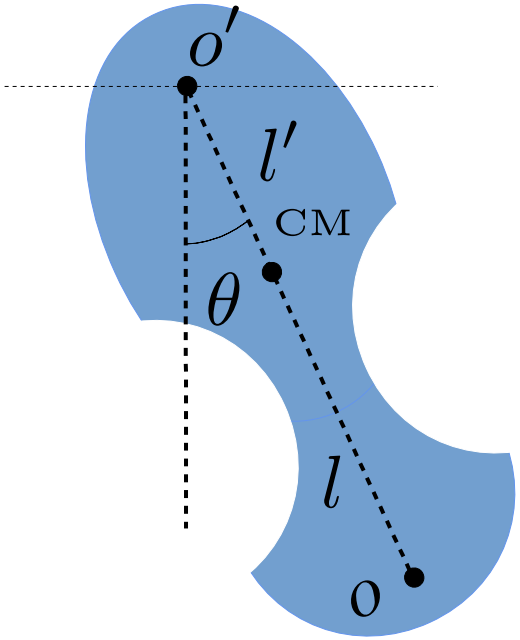
$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\mathbb{I}_o}{Mgl}}$$

$$\mathbb{I}_o = \mathbb{I}_{\mathrm{CM}} + Ml^2 = Mk_{\mathrm{CM}}^2 + Ml^2$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{k_{\mathrm{CM}}^2 + l^2}{gl}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



مرکز نوسان

$$T_{o'} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathbb{I}_{o'}}{Mgl'}}$$

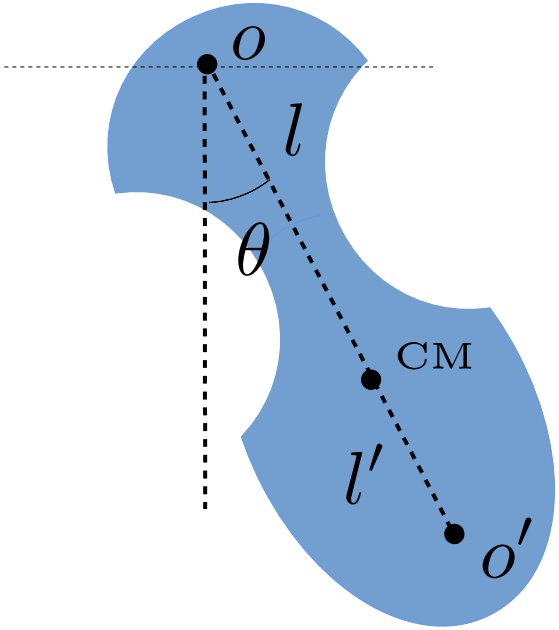
$$\mathbb{I}_{o'} = \mathbb{I}_{\mathrm{CM}} + Ml'^2 = Mk_{\mathrm{CM}}^2 + Ml'^2$$

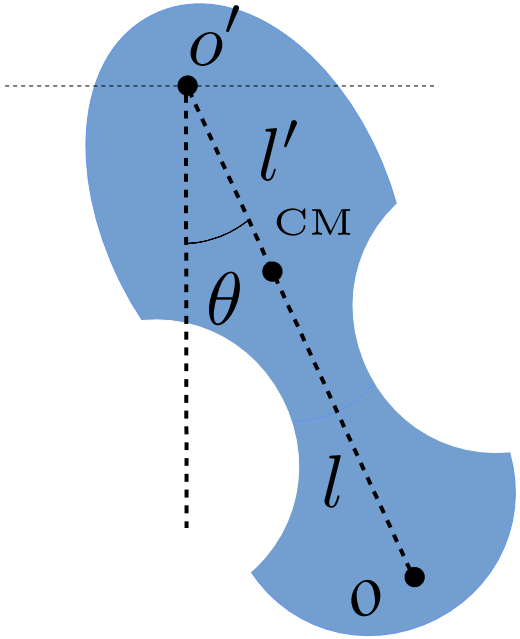
$$T_{o'} = 2\pi\sqrt{\frac{k_{\mathrm{CM}}^2 + l'^2}{gl'}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

مرکز نوسان





$$T_o = T_{o'} \quad \Rightarrow \quad \frac{k_{\mathrm{CM}}^2 + l^2}{gl} = \frac{k_{\mathrm{CM}}^2 + l'^2}{gl'} \quad \Rightarrow \quad k_{\mathrm{CM}}^2 = ll'$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم