جلسه پانزدهم

مکانیک آماری

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

* در این جلسه قصد داریم تغییراتی که مکانیک کوانتومی در خواص آماری گازها ایجاد می‌کند را بررسی می‌کنیم.

* مفهوم تعیین کننده‌ی مکانیک کوانتومی **ذرات یکسان** (تشخیص ناپذیر) می‌باشد. در مکانیک کوانتومی دو نوع ذره‌ی یکسان وجود دارد: بوزونها (Bosons) و فرمیونها (Fermions)

* در بیان ساده بوزونها حالتهای کوانتومی را به اشتراک می‌گذارند، در حالیکه فرمیونها نمی‌توانند حالتهای کوانتومی را به اشتراک بگذارند. روش دیگر برای بیان این موضوع این است که بگوییم بوزونها مشمول **اصل طرد پائولی** نیستند، در حالیکه فرمیونها هستند

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

* این تفاوت و به اشتراک گذاشتن حالتهای کوانتومی، تأثیر عمیقی بر توزیع آماری این ذرات بر روی حالتهای انرژی سیستم دارد. بطوریکه برای ذرات بوزونی، **آمار بوز-انیشتین** (BE) و برای ذرات فرمیونی، **آمار فرمی-دیراک** (FD) نسبت داده می‌شود.

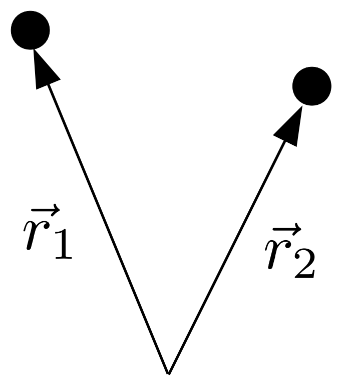
* تفاوت دیگر ذرات بوزونی و فرمیونها در اسپین آن‌ها می‌باشد. **بوزونها اسپین صحیح** دارند، در حالیکه **فرمیونها اسپین نیمه-صحیح** دارند.

* مثالی از بوزونها: فوتون (اسپین ۱) و اتم هلیوم-۴ (اسپین ۰)

* مثالی از فرمیونها: الکترون (اسپین ۱/۲) ، نوترینو (اسپین ۱/۲) ، پروتون (اسپین ۱/۲) و هلیوم-۳ (اسپین ۱/۲) و هسته لیتیوم (اسپین ۳/۲)

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

* اینجا می‌خواهیم استدلال کنیم که چرا یک تابع موج دو-ذره‌ای تحت **تبادل** (exchange) ذرات می‌تواند **متقارن** (symmetric) یا **پادمتقارن** (antisymmetric) باشد.



$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad \text{تابع موج دو-ذره‌ای}$$

تعریف اپراتور تبادل (exchange operator) که تعویض می‌کند ذره ۱ و ذره ۲ را بصورت

$$\hat{P}_{12}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

* چون ذرات یکسان هستند، ما انتظار داریم که هامیلتونی $\hat{\mathcal{H}}$ که سیستم دو-ذره‌ای را توصیف می‌کند با اپراتور تبادل $\hat{P}_{12}$ جابجا (commute) شود، یعنی

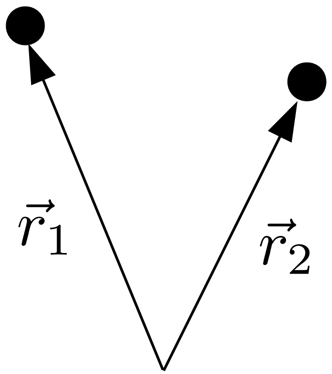
$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{P}_{12}] = 0$$

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{P}_{12}] = 0$$

$$\Downarrow$$

یعنی $\hat{\mathcal{H}}$ و $\hat{P}_{12}$ ویژه توابع یکسانی دارند.



$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{H}}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ \\ \hat{P}_{12}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \lambda\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \end{cases}$$

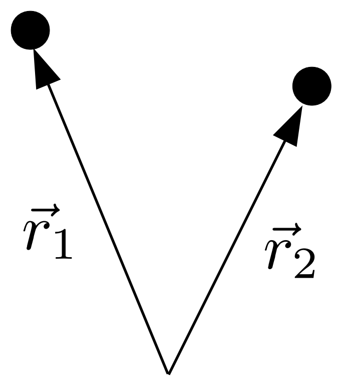
از طرفی چون $|\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)|^2 = |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2$ بنابراین $\lambda = \pm 1$

$$\hat{P}_{12}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \pm\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{P}_{12}] = 0 \Longrightarrow \hat{P}_{12}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \pm\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$



* اگر $\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ تابع موج تحت تبادل ذرات **متقارن** است.

* اگر $\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = -\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ تابع موج تحت تبادل ذرات **پادمتقارن** است.

* این استدلال برای ذرات در سه بعد معتبر است ، وضعیتی که معمولاً در دنیای سه بعدی ما با آن روبرو می شویم ، اما در دو بعد شکست می خورد. بدین ترتیب باید در مورد نحوه تبادل دو ذره کمی بیشتر مراقب باشید.

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

$|1\rangle$

$|0\rangle$

فرض کنید یک ذره می‌تواند در یکی از دوحالت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ وجود داشته باشد.

حالا سیستمی دو ذره‌ای را در نظر بگیرید که ذرات می‌تواند در حالتهای $|0\rangle$ و $|1\rangle$ وجود داشته باشند که حالت نهایی این ذرات را می‌توان بصورت حاصلضربی از حالتها نمایش داده می‌شود.

ذرات تشخیص پذیر باشند: $|0\rangle|0\rangle, \quad |1\rangle|0\rangle, \quad |0\rangle|1\rangle, \quad |1\rangle|1\rangle$

ذرات تشخیص ناپذیر (بوزون)باشند: $|0\rangle|0\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle], \quad |1\rangle|1\rangle$

ذرات تشخیص ناپذیر (فرمیون)باشند: $\frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle]$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

* در اینجا از تابع پارش بزرگ، $\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(\epsilon_i - \mu N_i)}$، استفاده می‌کنیم که i حالت کوانتومی خاصی را مشخص می‌کند.

* فرض کنید که فقط یک حالت کوانتومی وجود دارد که ذرات می‌توانند در آن قرار بگیرند و در نظر بگیرید که هزینه انرژی برای هر ذره برابر با E است.

$$\mathcal{Z} = 1 + e^{-\beta(E-\mu)} + e^{-2\beta(E-\mu)} + e^{-3\beta(E-\mu)} + \cdots$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0} e^{-n\beta(E-\mu)} = \sum_{n=0} e^{n\beta(\mu-E)}$$

* متوسط تعداد ذرات

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_{n=0} n e^{-n\beta(E-\mu)}}{\sum_{n=0} e^{-n\beta(E-\mu)}} = -\frac{1}{\beta}\frac{1}{\mathcal{Z}}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial E} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E}\ln \mathcal{Z}$$

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

* در اینجا از تابع پارش بزرگ، $\mathcal{Z}=\sum_i e^{-\beta(\epsilon_i-\mu N_i)}$، استفاده می‌کنیم که i حالت کوانتومی خاصی را مشخص می‌کند.

* فرض کنید که فقط یک حالت کوانتومی وجود دارد که ذرات می‌توانند در آن قرار بگیرند و در نظر بگیرید که هزینه انرژی برای هر ذره برابر با E است.

براي يک حالت کوانتومی مشخص

$$\mathcal{Z}=1+e^{-\beta(E-\mu)}+e^{-2\beta(E-\mu)}+e^{-3\beta(E-\mu)}+\cdots$$

$$\mathcal{Z}=\sum_{n=0} e^{-n\beta(E-\mu)}=\sum_{n=0} e^{n\beta(\mu-E)}$$

* **فرمیونها**

$$\mathcal{Z}=\sum_{n=0}^{1} e^{n\beta(\mu-E)}=1+e^{\beta(\mu-E)}$$

اصل طرد پائولی

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

برای یک حالت کوانتومی مشخص

* در اینجا از تابع پارش بزرگ، $\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(\epsilon_i - \mu N_i)}$، استفاده می‌کنیم که i حالت کوانتومی خاصی را مشخص می‌کند.

* فرض کنید که فقط یک حالت کوانتومی وجود دارد که ذرات می‌توانند در آن قرار بگیرند و در نظر بگیرید که هزینه انرژی برای هر ذره برابر با E است.

$$\mathcal{Z} = 1 + e^{-\beta(E-\mu)} + e^{-2\beta(E-\mu)} + e^{-3\beta(E-\mu)} + \cdots$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0} e^{-n\beta(E-\mu)} = \sum_{n=0} e^{n\beta(\mu-E)}$$

* **بوزونها**

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\beta(\mu-E)} = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu-E)}}$$

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

برای یک حالت کوانتومی مشخص

* فرمیونها

اصل طرد پائولی

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{1} e^{n\beta(\mu-E)} = 1 + e^{\beta(\mu-E)}$$

$$\ln \mathcal{Z} = \ln[1 + e^{\beta(\mu-E)}]$$

* بوزونها

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\beta(\mu-E)} = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu-E)}}$$

$$\ln \mathcal{Z} = -\ln[1 - e^{\beta(\mu-E)}]$$

* بطورکلی

فرمیونها

$$\ln \mathcal{Z}_{\pm} = \pm \ln[1 \pm e^{\beta(\mu-E)}]$$

بوزون

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

برای یک حالت کوانتومی مشخص

$$\ln \mathcal{Z}_{\pm} = \pm \ln[1 \pm e^{\beta(\mu - E)}]$$

$$\langle n \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E}\ln \mathcal{Z}$$

* فرمیونها

$$\langle n \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E}\ln \mathcal{Z}_{+} = \frac{e^{\beta(\mu - E)}}{1 + e^{\beta(\mu - E)}}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(E - \mu)} + 1}$$

* بوزونها

$$\langle n \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E}\ln \mathcal{Z}_{-} = \frac{e^{\beta(\mu - E)}}{1 - e^{\beta(\mu - E)}}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(E - \mu)} - 1}$$

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

برای یک حالت کوانتومی مشخص

$$\ln \mathcal{Z}_{\pm} = \pm \ln[1 \pm e^{\beta(\mu - E)}]$$

$$\langle n \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E}\ln \mathcal{Z}$$

* فرمیونها

$$\langle n \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E}\ln \mathcal{Z}_{+} = \frac{e^{\beta(\mu - E)}}{1 + e^{\beta(\mu - E)}}$$

$$\langle n \rangle_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$$

* بوزونها

$$\langle n \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E}\ln \mathcal{Z}_{-} = \frac{e^{\beta(\mu - E)}}{1 - e^{\beta(\mu - E)}}$$

$$\langle n \rangle_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1}$$

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

$$\vdots$$

$$
\begin{array}{cccc}
E_3 & \underline{\quad n_3 \quad} & e^{-n_3\beta(E_3-\mu)} & \langle n_3 \rangle =? \\
E_2 & \underline{\quad n_2 \quad} & e^{-n_2\beta(E_2-\mu)} & \langle n_2 \rangle =? \\
E_1 & \underline{\quad n_1 \quad} & e^{-n_1\beta(E_1-\mu)} & \langle n_1 \rangle =?
\end{array}
$$

$$e^{-n_1\beta(E_1-\mu)} \times e^{-n_2\beta(E_2-\mu)} \times e^{-n_3\beta(E_3-\mu)} \times \cdots = \prod_i e^{-n_i\beta(E_i-\mu)}$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{n_i\}} \prod_i e^{-n_i\beta(E_i-\mu)}$$

فرمیون $\{n_i\} = \{0, 1\}$

بوزون $\{n_i\} = \{0, 1, \cdots, \infty\}$

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

$$\{n_i\} = \{0, 1\}$$ فرمیون

$$\{n_i\} = \{0, 1, \cdots, \infty\}$$ بوزون

* فرمیونها

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{n_i\}} \prod_i e^{-n_i\beta(E_i-\mu)} = \prod_i \sum_{\{n_i\}} e^{-n_i\beta(E_i-\mu)}$$

$$\mathcal{Z} = \prod_i \sum_{\{n_i\}} e^{-n_i\beta(E_i-\mu)} = \prod_i [1 + e^{-\beta(E_i-\mu)}]$$

$$\ln \mathcal{Z} = \sum_i \ln[1 + e^{-\beta(E_i-\mu)}]$$

$$\langle n_i \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial E_i} \ln \mathcal{Z} = \frac{e^{-\beta(E_i-\mu)}}{1 + e^{-\beta(E_i-\mu)}} \Rightarrow \boxed{\langle n_i \rangle_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} + 1}}$$

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک

فرمیون $\{n_i\} = \{0, 1\}$

بوزون $\{n_i\} = \{0, 1, \cdots, \infty\}$

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{n_i\}} \prod_i e^{-n_i \beta (E_i - \mu)} = \prod_i \sum_{\{n_i\}} e^{-n_i \beta (E_i - \mu)}$$

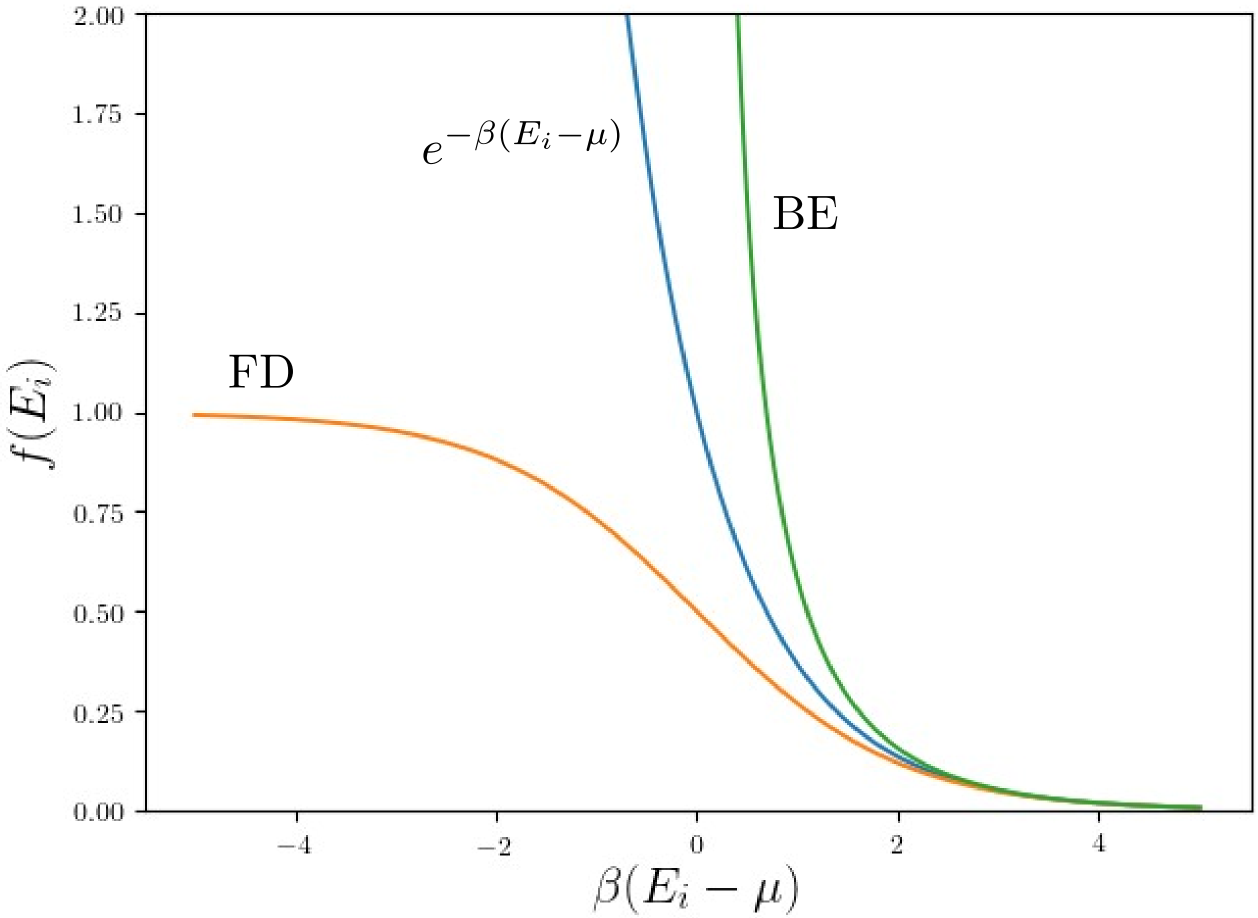
* **بوزونها**

$$\mathcal{Z} = \prod_i \sum_{\{n_i\}} e^{-n_i \beta (E_i - \mu)} = \prod_i [1 + e^{-\beta (E_i - \mu)} + e^{-2\beta (E_i - \mu)} + \cdots]$$

$$\ln \mathcal{Z} = -\sum_i \ln[1 - e^{-\beta (E_i - \mu)}]$$

$$\langle n_i \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_i} \ln \mathcal{Z} = \frac{e^{-\beta (E_i - \mu)}}{1 - e^{-\beta (E_i - \mu)}} \Rightarrow \boxed{\langle n_i \rangle_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta (E_i - \mu)} - 1}}$$

توزیع بوز-انیشتین و توزیع فرمی-دیراک



$$\langle n_i \rangle_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}+1} = f_{\text{FD}}(E_i)$$

$$\langle n_i \rangle_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}-1} = f_{\text{BE}}(E_i)$$